

## 2025年度実力テスト(午後の部)

2026年1月21日(水)

13:20~14:50 90分

### 解答上の注意

- ・ 問題は全部で6題ある。  
最初の2題、量子力学 I、統計力学 I は必ず解答すること。  
残り4題は選択問題である。うち2問を選択し解答すること。
- ・ すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。
- ・ 答えは解答用紙の科目欄に選択した問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答えを記入すること。ただし、解答欄が足りない場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。
- ・ 解答用紙はすべて提出すること。
- ・ 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出のうえ、退室を認める。

# 午後の部 1 量子力学 I <必須>

井戸の壁が無限に高い1次元井戸型ポテンシャルを考える。質量  $m$  の粒子が区間  $0 \leq x \leq L$  に閉じ込められているとする。以下の問いに答えよ。計算の過程も簡略に示せ。

I. 定常状態におけるエネルギーを  $E$ 、波動関数を  $\varphi(x)$  と表す。

- 【1】 定常状態に対するシュレディンガー方程式を具体的に微分方程式の形で書き表せ。
- 【2】 このときの境界条件を示せ。
- 【3】 エネルギーの低い順に、エネルギー準位を  $E_1, E_2, \dots$  とし、その波動関数を順に  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  とする。  $n$  番目の準位について  $E_n$  と  $\varphi_n(x)$  を求めよ。ただし  $\varphi_n(x)$  は規格化すること。
- 【4】  $n = 1, 2, 3$  について、波動関数  $\varphi_n(x)$  のグラフを横軸に  $x$  をとって描け。特徴がわかるように工夫すること。

II. 次に、非定常状態を考える。時刻  $t = 0$  において、波動関数が

$$\psi(x, 0) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$$

で表されたとする。ここで  $\varphi_n(x)$  は上記【3】で求められた定常状態の波動関数で、 $c_n$  は定数である (ただし  $n = 1, 2, 3$ )。なお、時間に依存するシュレディンガー方程式は  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H}\psi(x, t)$  である。

- 【5】 ここから、時刻  $t (> 0)$  における波動関数  $\psi(x, t)$  を求めよ。
- 【6】 時刻  $t_1 (> 0)$  において粒子のエネルギーの観測を行った。どのような結果が得られるか示せ。
- 【7】 時刻  $t_1$  におけるエネルギーの期待値  $\langle E \rangle$  を求めよ。
- 【8】 時刻  $t_1$  におけるエネルギーの観測の結果、仮に  $E = E_3$  という測定値が得られたとする。この場合、観測直後の波動関数  $\psi(x, t_1)$  はどうなるか。
- 【9】 上記【8】の場合、さらに時刻  $t = t_2 (> t_1)$  において再度エネルギーの観測を行った。どのような結果が得られるか示せ。

## 午後の部 2 統計力学 I <必須>

温度  $T$  の熱浴に接している系を考える。ボルツマン定数を  $k_B$  とする。

問 1. 分配関数とはどのような量であるかについて、「ボルツマン因子」という用語を用いて文章で説明せよ。長くても 50 文字程度で簡潔に書くこと。

問 2. あるミクロな状態  $i$  のエネルギーを  $E_i$  とする。この状態  $i$  が出現する確率を式で表せ。

以下、気体分子の速度  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  の分布について考える。気体分子の質量を  $m$  とする。

問 3. 気体分子の速度の  $x$  成分の確率分布  $P_x(v_x)$  を式で表せ。

問 4.  $v_x$  の期待値と分散を求めよ。

問 5. 気体分子の速度の確率分布  $P(v_x, v_y, v_z)$  を式で表せ。

問 6. 問 5 の結果から、気体分子の速さ  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  の確率分布  $F(v)$  を求めよ。

問 7  $F(v)$  のグラフの概形を描け。ピークの位置を求めてきちんと明記すること。また、温度が二倍になった時にグラフがどのように変化するか図で示せ。

## 午後の部 3 量子力学Ⅱ <選択>

パウリ行列は  $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  で定義される。以下の問題では、スピン演算子  $\hat{S}$  はパウリ行列によって  $\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$  とあらわされることを用いよ。ここで、 $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$  である。

問1. 以下の問に答えよ。計算の過程も必ず示すこと。

1-1) スピン演算子  $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$  を行列であらわせ。

1-2) 以下のスピン演算子の交換積を、行列を用いて計算せよ。

(a)  $[\hat{S}_x, \hat{S}_y]$ 、 (b)  $[\hat{S}_z, \hat{S}_x]$ 、 (c)  $[\hat{S}_z, \hat{S}^2]$

1-3)  $\hat{S}_z$  の正（負）の固有値に対する固有ベクトルを  $\chi_{\uparrow}$  ( $\chi_{\downarrow}$ ) で表す。 $\chi_{\uparrow}$  と  $\chi_{\downarrow}$  を求めよ。ただし固有ベクトルは規格化しておくこと。

1-4)  $\hat{S}_x$  の正（負）の固有値に対する固有ベクトルを  $\chi_{x+}$  ( $\chi_{x-}$ ) で表す。 $\chi_{x+}$  と  $\chi_{x-}$  を求めよ。ただし固有ベクトルは規格化しておくこと。

1-5)  $\chi_{x+}$  を  $\chi_{\uparrow}$  および  $\chi_{\downarrow}$  の重ね合わせ  $\chi_{x+} = c_1\chi_{\uparrow} + c_2\chi_{\downarrow}$  で表す。複素定数  $c_1$  および  $c_2$  を求めよ。

問2. 問1の結果を用いて、スピンに関する不確定性原理を説明せよ。

# 午後の部 4 固体物理<選択>

以下の文章の空欄(1)~(12)にあてはまる最も適切な数式または語句を答えると共に、以下の問1と問2に各々答えよ。ただし、固体中自由電子の電荷を $e(< 0)$ 、単位体積中の電子密度を $n$ 、温度を $T$ とする。

固体結晶を特徴付ける (1) 対称性や点対称性の検出には、結晶の格子定数よりも短い波長を持つ量子ビーム (X線や電子線など) の回折現象が利用される。一般に量子ビームの波長 $\lambda$ は、Planck定数 $h$ と運動量 $p$ を用いて、 $\lambda =$  (2) と表されるので、エネルギー $E$ を持つX線の波長は光速 $c$ を用いて、 $\lambda_{\text{Xray}} =$  (3)、エネルギー $E$ を持つ電子線の波長は電子の質量 $m$ を用いて、 $\lambda_{\text{elec}} =$  (4)、と表される。次に、結晶格子とその逆格子の基本ベクトルを各々、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ と $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ で表す場合、 $\mathbf{b}_1 = 2\pi \times$  (5) /  $\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$ という関係が成り立ち、一辺の長さが $a$ の面心立方格子の逆格子は、(6)を一辺の長さとする(7)格子になる。

固体中自由電子の振る舞いを古典論で説明するDrude理論において、電流密度 $j$ は単位時間に単位面積を通過する電荷数に一致するので、電子の速度 $v$ を用いて $j =$  (8) と表される。一方、自由電子が運ぶ熱流密度 $j_q$ は単位時間に単位面積を通過するエネルギー $E$ に一致するので、同様に、 $j_q =$  (9) と表される。 $j$ と $j_q$ は静電ポテンシャルと(10)の空間勾配に各々比例し、その高い方から低い方へ流れる時の比例係数を各々、電気伝導度 $\sigma$ 、熱伝導度 $\kappa$ と呼ぶ。電気伝導度 $\sigma$ は、散乱時間 $\tau$ を用いる静電場中の運動方程式 ( $d\mathbf{p}/dt = -\mathbf{p}/\tau + e(-\nabla\phi)$ ,  $\phi$ は静電ポテンシャル) の定常解として、 $\sigma =$  (11) と求められる。一方、熱伝導度 $\kappa$ は、ある位置 $\mathbf{r}$ を $x$ 軸の正方向に通過する正味の熱流密度が $\mathbf{r}$ から $x$ 軸方向に少し離れた $r_x - v_x\tau$ と $r_x + v_x\tau$ から各々流入する熱流密度の和で与えられることから、 $\kappa = c_v v^2 \tau / 3$ と求められる。ここで、 $c_v (= n dE/dT)$ は(12)である。

問1 Drude理論では、固体中自由電子を互いに相互作用のない古典的理想気体分子と見なす。この場合に成り立つエネルギー等分配則 ( $mv^2/2 = 3k_B T/2$ ) を用いて、 $c_v$ の微視的表式を求めよ。

問2 上記の(11)や熱伝導度 $\kappa$ の表式、および問1の結果を用いて、熱伝導度 $\kappa$ と電気伝導度 $\sigma$ の比を計算せよ。その結果に基づいて、Wiedemann-Franz則の内容を簡潔に説明せよ。

# 午後の部 5

## 相対論＋原子核物理／場と粒子〈選択〉

1. 特殊相対性理論の指導原理である「特殊相対性原理」と「光速度不変の原理」について物理的に説明せよ。
2. 慣性系  $S(ct, x, y, z)$  と、 $S$  系に対して  $+x$  方向へ速度  $\beta c$  で動く慣性系  $S'(ct', x', y', z')$  へのローレンツ変換を以下のように導出してみよう。以下では光速を  $c$  とする。
  - (i)  $(ct', x')$  を  $(ct, x)$  および定数  $A > 0, K > 0$  を用いて

$$\begin{cases} ct' = A(ct - \beta x) \\ x' = K(x - \beta ct) \end{cases}$$

と表すことができる。特殊相対性原理および光速度不変の原理に基づくと、逆変換はどのような形になるべきか。 $(ct, x)$  を  $(ct', x')$  および  $A, K$  を用いて表せ。

- (ii) 前問の結果を用いて定数  $A, K$  を求めよ。
3. (i)  $S$  系で測って、速度  $v_0 = \frac{dx}{dt}$  で  $x$  軸方向へ運動する物体がある。 $S'$  系で測って、この物体の速度が  $v' = \frac{dx'}{dt'}$  であった。 $\beta' = v'/c$  を  $\beta_0 = v_0/c$  と  $\beta$  で表せ。
    - (ii) 前問の結果を用いて、 $S$  系と  $S'$  系の間で光速度不変の原理が成り立つことを確認せよ。

# 午後の部 6 電気・電子回路〈選択〉

[1] 図 1(a), (b) の四端子回路は npn バイポーラトランジスタを用いた、二種類の接地方式の回路を表す。図中の  $i_x (x = b, c, e)$  はそれぞれの端子 (b: ベース, c: コレクタ, e: エミッタ) に破線矢印の方向を正として流れ込む電流を表す。 $v_{yz} (y, z = b, c, e)$  は  $z$  端子の電圧を基準とした  $y$  端子の電圧を表し、図中に実線矢印と共に示されている。図 1(a) の回路では、4 つの  $h$  パラメータ  $h_1, h_2, h_3, h_4$  を用いて次式 (A), (B) が成り立っている：

$$v_{be} = h_1 i_b + h_2 v_{ce} \quad (A)$$

$$i_c = h_3 i_b + h_4 v_{ce} \quad (B)$$

(1-1) 図 1(c) の回路は図 1(a) の回路の  $h$  パラメータ等価回路である。電流  $i_i, i_o$ 、電圧  $v_i, v_o$  はそれぞれ入力・出力電流及び入力・出力電圧であり、 $z_1, v_1, i_2, z_2$  は図中の該当する素子が担うインピーダンス、電圧、電流、及びインピーダンスである。 $i_i, i_o, v_i, v_o, z_1, v_1, i_2, z_2$  のそれぞれを、 $h_1, h_2, h_3, h_4, i_x (x = b, c, e), v_{yz} (y, z = b, c, e)$  の何れかのみを用いて最も適切に式で表せ (解答に  $i_i, i_o, v_i, v_o$  を使用することは禁止)。

(1-2) 図 1(a) の回路の  $i_b$  と  $i_c$  の間に成り立つ関係を  $\alpha$  を用いて式で表せ。同時にまた、 $i_b$  と  $i_c$  (の間に成り立つ関係を  $\beta$  を用いて最も適切に式で表せ。なお、 $\alpha$  及び  $\beta$  はそれぞれベース及びエミッタ接地電流増幅率である。

(1-3) 図 1(b) の回路では 4 つの  $h$  パラメータ  $H_1, H_2, H_3, H_4$  を用いて次式 (C), (D) が成り立つ：

$$v_{eb} = H_1 i_e + H_2 v_{cb} \quad (C)$$

$$i_c = H_3 i_e + H_4 v_{cb} \quad (D)$$

さて、例えば図 1(a) に現れているエミッタ・ベース間の電圧  $v_{be}$  は図 1(b) の  $v_{eb}$  を用いると  $v_{be} = -v_{eb}$  と書き直すことができる。この例に倣い、図 1(a) 中の各電圧・電流を図 1(b) 中の各電圧・電流を用いて書き直すことで  $H_1, H_2, H_3, H_4$  のそれぞれを、 $h_1, h_2, h_3, h_4$  を用いて最も適切に式で表せ。なお  $v_{cb} \gg v_{eb}$  であるため、 $v_{cb}$  に対して  $v_{eb}$  は無視できるとする近似を適切に用いて解答すること。

(1-4) 図 1(d) の回路は図 1(b) の回路の  $h$  パラメータ簡易等価回路であり、電流  $i_i, i_o$ 、電圧  $v_i, v_o$  はそれぞれ入力・出力電流及び入力・出力電圧、 $z_3, i_4$  は各素子が担うインピーダンス及び電流である。 $z_3, i_4$  のそれぞれを  $h_1, h_2, h_3, h_4, i_x (x = b, c, e), v_{yz} (y, z = b, c, e)$  の何れかのみを用いて最も適切に式で表せ ( $i_i, i_o, v_i, v_o$  は使用禁止)。

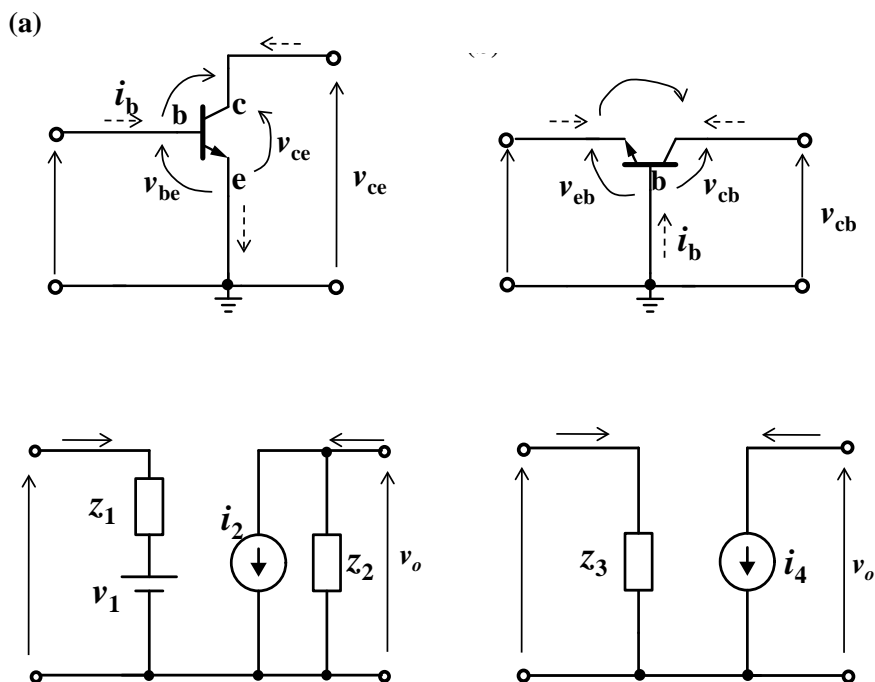


図 1