２０２５年度実力テスト（午前の部）

２０２６年１月２１日（水）

１１：００～１２：３０　９０分

解答上の注意

・ 問題は全部で3題ある。全てに解答すること。

・ すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・ 解答用紙の科目欄に問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が足りない場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

・ 解答用紙はすべて提出すること。

・ 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出のうえ、退室を認める。。

午前の部　1　基礎物理数学＜必須＞

解答には途中の計算経過、および論理も明確に記すこと。

1. 以下の積分を計算せよ。$f(x)$ は積分範囲内で連続であり $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。
   (a) $\int dx \frac{1}{x^2-8x+7}$
   (b) $\int_a^b dx f'(x) e^{-f(x)}$,
   (c) $\int_0^\pi dx \cos(x) e^{a\sin(x)}$
   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-ax^2}$
2. p は 0 でない整数、$\boldsymbol{r}=(x,y,z), r=|\boldsymbol{r}|$ とする。$f(x,y,z)=f(\boldsymbol{r})=\log r^p$ のとき、

$$\mathrm{grad} f(r) = \nabla f(r) = (\frac{\partial}{\partial x} f(r), \frac{\partial}{\partial y} f(r), \frac{\partial}{\partial z} f(r))$$

   を p, r と $\boldsymbol{r}$ により表せ。
3. a, b を正の実数とする。ベクトル場

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \left(\frac{ay}{(x^2+y^2)^4}, -\frac{ax}{(x^2+y^2)^4}, 0 \right) \qquad (1)$$

   を考える。次の線積分

$$\int d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \qquad (2)$$

   を、$(b,0,0)$ を始点として原点を中心とする xy 平面内の半径 b の円周を反時計回りに一周、線積分せよ。

午前の部　２ 力学Ⅰ／Ⅱ＜必須＞

(Ⅰ) n 個の質点からなる質点系がある。慣性座標系 Σ を考え、それぞれの質点の質量と位置ベクトルを

$$m_k, \quad \vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

とする。2 質点間には次のようなポテンシャルで表される相互作用が働く：

$$U(r_{ik}) = -\frac{\alpha}{r_{ik}} \exp(-\beta\, r_{ik})$$

ここで α、β は正の実数定数である。r_{ik} は i 番目と k 番目の質点間の距離 $(i \neq k)$ である。それぞれの質点の位置ベクトルを $\vec{r}_i(t), \vec{r}_k(t)$、相対位置ベクトルを $\vec{r}_{ik}(t) = \vec{r}_k(t) - \vec{r}_i(t)$ とおき、$r_{ik} = |\vec{r}_{ik}(t)|$ で表される（簡略化のため「(t)」は省略した）。

簡単のために、質点間の重力は無視できるとする。また質点系に外力は働いていない。

(1) k 番目の質点の運動方程式を記せ。

(2) 重心（質量中心）G の位置ベクトル $\vec{R}_G(t)$ をもとめよ。$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ と置いてよい。

(3) G の速度 $\vec{V}_G$ が保存することを示せ。

(4) Σ 系の原点まわりの全角運動量 $\vec{L}$ が保存することを示せ。

(5) Σ 系に対して、一定速度 $\vec{U}$ で運動する座標系を Σ' 系とする。Σ' 系での質点の位置ベクトル、速度ベクトルをそれぞれ

$$\vec{r'}_k = (x'_k, y'_k, z'_k), \quad \vec{v'}_k = (v'_{x,k},\, v'_{y,k},\, v'_{z,k}) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

とする。相対位置ベクトル $\vec{r'}_{ik}$ と Σ 系における相対位置ベクトル $\vec{r}_{ik}$ の関係、および、両座標系における勾配（∇ と ∇'）の関係を示せ。

(6) 上の議論を考慮し、(1) でもとめた方程式に基づき、Σ' 系における k 番目の質点の運動方程式をもとめよ。

(7) Σ 系における G の原点まわりの角運動量を $\vec{L}_G$、各質点の G に対する相対運動の角運動量を $\vec{\ell}^*_k$、その和を $\vec{L}^* = \sum_{k=1}^{n} \vec{\ell}^*_k$ とする。座標変換 $\Sigma \to \Sigma'$ に対して $\vec{L}^*$ が不変であることを示せ。

(Ⅱ) 回転楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1$$

（ただし a, b は正の実数）で表される一様密度の剛体がある。この密度を ρ とおく。

(1) この剛体の z 軸まわりの慣性モーメント I_z をもとめよ。計算の仕方がわかるように簡便に答えること。

(2) 上記剛体が z 軸周りに回転している。点 $(x = a, y = 0, z = 0)$ で細い棒を剛体表面に対して垂直に一定の力で押し当てる。棒が剛体を押す力は $\vec{N} = (-N, 0, 0)$, $(N > 0)$ で、これにより剛体の回転軸が変化することはなく、z 軸を中心軸として回転を続ける。また、剛体と棒の間の摩擦係数は μ である。剛体には他の力は働いていない。

z 軸まわりの剛体の回転角を $\varphi(t)$（$+z$ 方向から見て反時計回りを正）とおき、剛体の z 軸まわりの回転の運動方程式を記せ。以下の解答では I_z をもちいて良い。

(3) $t = 0$ における剛体の z 軸まわりの角速度が $\Omega\,(\Omega > 0)$ であった。剛体が停止する時刻をもとめよ。

午前の部　３ 電磁気学＜必須＞

1. 無限に長い直線に電荷が線密度 λ で一様に分布している。

(1) この直線電荷から距離 r 離れた位置における電場 $E(r)$ を求めよ。

(2) 静電ポテンシャル $\phi(r)$ の大きさを求めよ。ただし、$r = r_0$ を基準点とする。

2. 無限に広い yz 平面 $(x = 0)$ 上の導体に、y 軸の正方向に一様な電流（面電流密度 i ）が流れている。ただし面電流密度は単位長さあたりの電流を表す。

(1) この面電流がつくる磁場の向きと磁束密度の大きさを積分型のアンペールの法則を用いて求めよ。

(2) ベクトルポテンシャルの向きと大きさを求めよ。$x = 0$ を基準点とする。

3. x 軸の正と負の向きにそれぞれ進む２つの電磁波を考える。電場は y 軸方向に振動し、それらの大きさは

$$E_1(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t), \quad E_2(x,t) = E_0 \sin(kx + \omega t)$$

で与えられるとする。

(1) 自由空間（電荷密度と電流密度の値がゼロであるような空間）におけるマックスウェルの方程式を記せ。

(2) それぞれの電磁波の磁場の大きさ $B_1(x,t)$, $B_2(x,t)$ と振動方向を求めよ。ただし、電磁波の速度を c とする。

(3) これらの電磁波の重ね合わせによって生じる電場および磁場の振動 $E(x,t)$, $B(x,t)$ を求めよ。