2024年度実力テスト（午後の部）

２０２５年１月１７日（金）

１３：２０～１４：５０　９０分

解答上の注意

・　問題は全部で6題ある。
　最初の2題、量子力学Ｉ、統計力学Ｉは必ず解答すること。
　残り4題は選択問題である。うち2問を選択し解答すること。

・ すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・ 答案は解答用紙の科目欄に選択した問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が足りない場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

・ 解答用紙はすべて提出すること。

・ 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出のうえ、退室を認める。

午後の部　1　量子力学 I ＜必須＞

以下の問に答えよ。必要があれば、量・数・式などを自分で定義して使っても良い。ただしその説明は答案にきちんと記述すること。

1次元空間に存在する粒子を考える。量子力学的な状態は波動関数 $\psi(x,t)$ で表される。波動関数は時間に依存するシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{\mathcal{H}}\psi(x,t) \tag{1}$$

の解である。ここで $\hat{\mathcal{H}}$ はハミルトニアンである。定常状態に限ると、この状態は定常状態に対するシュレディンガー方程式

$$\hat{\mathcal{H}}\varphi(x)=E\varphi(x) \tag{2}$$

を解いて求められる波動関数 $\varphi(x)$ で表すことができる。

(1) 波動関数 $\varphi(x)$ は規格化されているものとする。

1-1) 波動関数 $\varphi(x)$ で表される量子力学的な状態に対して、粒子の位置を測定する実験を行った。粒子が x〜$x+dx$ の微小範囲に存在する確率を示せ。

1-2) 波動関数 $\varphi(x)$ に対する規格化条件を示し、その意味を説明せよ。

(2) 波動関数 $\varphi(x)$ によって表される状態に対して、物理量 $\hat{A}$ の測定を行った。

2-1) 一般に、どのような測定結果が得られ、そこからどのような値が得られるか、式を用いて説明せよ。

2-2) $\hat{A}\varphi(x)=a\varphi(x)$ が成り立つ場合には、どのような測定結果が得られるか。

(3) シュレディンガー方程式 (2) の解である $\varphi(x)$ で表される状態は、量子力学的な状態なのでシュレディンガー方程式 (1) の解である $\psi(x,t)$ で表すことも可能である。

3-1) $\varphi(x)$ と $\psi(x,t)$ の間の関係を式で示せ。

3-2) この $\psi(x,t)$ で表される状態について、任意の物理量 $\hat{A}$ の観測を行った。ただし $\hat{A}$ は時間に陽に依存しない（式の中に時刻 t を一切ふくまない）ものとする。観測結果がどうなるか説明せよ。

(4) シュレディンガー方程式 (2) の解 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ を考える。ここで $\hat{\mathcal{H}}\varphi_i(x)=E_i(x)$ $(i=1,2)$ かつ $E_1\neq E_2$ とする。$\varphi_i(x)$ $(i=1,2)$ はそれぞれ規格化済みとする。ここで波動関数 $\varphi(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$（ただし c_1、c_2 は複素定数）で表される重ね合わせ状態を考える。

4-1) この場合の規格化条件を示せ。

4-2) この状態に対して、エネルギーの測定を行った。どのような結果が得られるか。

4-3) 上記の測定を行った直後の波動関数はどうなるか説明せよ。

4-4) 時刻 $t=0$ において波動関数 $\varphi(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$ で表される状態を考える。これは量子力学的な状態なので $\psi(x,t)$ で表すことも可能である。$\psi(x,t)$ を示せ。

午後の部　2 統計力学 I <必須>

個々の原子が三つの離散的なエネルギー準位 $-\epsilon,\ 0,\ \epsilon$ を持つ原子集団の熱・統計力学的性質を考える。系内には N 個の原子があり、原子間の相互作用は無視できるとする。系は温度 T の熱浴に接しているとして、以下の問いに答えよ。ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_BT$ とする。解答では、T と β は混在していてもよいものとする。

問 1. この系の分配関数を求めよ。

問 2. この系の内部エネルギー（エネルギーの期待値）を求めよ。

問 3. この系のエントロピーを求めよ。

問 4. 高温 $(T \to \infty)$ 極限で内部エネルギー、エントロピーはそれぞれ一定値に近づく。その極限値を求めよ。

問 5. 低温 $(T \to 0)$ の極限で、内部エネルギー、エントロピーはそれぞれ一定値に近づく。その極限値を求めよ。

問 6. 問 5 で得たエントロピーの高温での極限値について、エントロピーについてのボルツマンの公式と関連付けて考察せよ。

午後の部　3 量子力学II<選択>

調和振動子のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ は数演算子 $\hat{N}$ を用いて $\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$ と表すことができる。ここで $\hat{N}$ は生成消滅演算子 $\hat{a}^\dagger$、$\hat{a}$ によって $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ で定義される。

生成消滅演算子および数演算子について、以下の性質が成り立つ：
生成消滅演算子は交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たす。波動関数 φ_n について $\hat{N}\varphi_n = n\varphi_n$ が成り立つとすると、調和振動子の固有エネルギーは非負であるため、$\hat{N}$ の固有値 n について $n + \frac{1}{2} \geq 0$ でなければならない。

以下の問に答えよ。途中式も簡略に示すこと。理由も説明せよ。

問 1) 交換積 $[\hat{N}, \hat{a}]$ を求めよ。

問 2) $\phi = \hat{a}\varphi_n$ とする。$\hat{N}\phi$ を求めよ。

問 3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\phi|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*\phi = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (\varphi_n^*\hat{a}^\dagger)(\hat{a}\varphi_n)$ を計算せよ。ただし φ_n は規格化条件 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\varphi_n|^2 = 1$ を満たすものとする。

問 4) 問 2〜3 の結果より、$n = 0$ の場合の ϕ を示せ。

問 5) 問 2〜3 の結果より、$n \neq 0$ の場合の ϕ がどのような関数であるか、特に φ_n との関連性を中心に説明せよ。

問 6) ここまでの結果をすべてふまえ、n はどのような値を取らなければならないか説明せよ。

問 7) 調和振動子が生成消滅演算子で表されることから、量子力学において振動・波動現象が粒子性を示すことが理解される。これを説明せよ。

午後の部　４ 固体物理＜選択＞

系の体積をV、全電子数をNとする金属中自由電子を古典論と量子論の立場で考える。系の空間次元を３次元、電子の質量をm、電荷を$-e(e>0)$、系の絶対温度をT、真空の誘電率をε_0として以下の問いに答えよ。

（１） 単位時間に単位面積を通過する電荷量が電流密度$\boldsymbol{j}$を与えることから、電流密度$\boldsymbol{j}$と自由電子の速度$\boldsymbol{v}$の関係式を示せ。

（２） 緩和時間近似で得られる自由電子の古典的運動方程式（$d\boldsymbol{p}/dt=-\boldsymbol{p}/\tau+\boldsymbol{f}$、ただし、$\boldsymbol{p}$は自由電子の運動量、$\boldsymbol{f}$は外力）を用い、交流電場$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E_0}e^{i\omega t}$ に対する交流伝導度$\sigma(\omega)$を求めよ。

（３） 複素誘電率（または誘電関数）$\varepsilon(\omega)$と交流伝導度$\sigma(\omega)$の関係式（$\varepsilon(\omega)=1-\sigma(\omega)/i\omega\varepsilon_0$）を用いて、$\omega\tau\gg 1$の高周波極限における$\varepsilon(\omega)$を求めよ。

（４） 量子論では、$T=0$の基底状態がフェルミ球で表される。この時、フェルミ球の半径（すなわち、フェルミ波数）k_Fを求めよ。

（５） 基底状態の内部エネルギー$U\left(=2\sum_{k<k_F}(\hbar^2k^2/2m)\right)$を求め、$U$とフェルミエネルギー$E_F(=\hbar^2k_F^2/2m)$の関係式を示せ。

（６） 金属内の周期ポテンシャル中を運動するブロッホ電子の速度を$\bar{\boldsymbol{v}}(=\boldsymbol{\nabla_k}E(\boldsymbol{k})/\hbar)$で表し、その運動方程式を$\hbar\cdot d\boldsymbol{k}/dt=\boldsymbol{f}$（$\boldsymbol{f}$は外力）で表すとき、ブロッホ電子の有効質量$m^*$が金属中ブロッホ電子のエネルギーバンド$E(\boldsymbol{k})$と関係付けられることを示せ。

午後の部　５

相対論＋原子核物理／場と粒子<選択>

電子と光子の「コンプトン散乱」とはどのような物理過程なのかについて、エネルギー保存則や運動量保存則などの数式を用いて説明し、さらに、その解答中で「コンプトン波長」についての式も導出せよ。

注意：
単に言葉のみの説明は採点せずに０点とする。
解答の説明中に文字式を含めた程度のものは「数式を用いた説明」とはみなさなず、この場合も採点しない。

ヒント：
電子の静止した座標系で保存則を書き下すと考えやすいと思われる。)

午後の部　6　電気・電子回路＜選択＞

[1] 図 1 の様な抵抗値 R [Ω] の抵抗、インダクタンスが L [H] のコイル、及び電気容量 C [F] のコンデンサが並列に接続された回路がある。以下の設問に答えよ（各 10 点）。

(a) 図 1 の回路において、入力側に電圧（実効値、以下省略）V [V] の交流電源を接続したところ、抵抗、コイル、及びコンデンサのそれぞれに流れる電流が、$I_R = 5$ A、$I_L = 16$ A、及び $I_C = 4$ A となった。

(a-1) この時、電源から LCR 並列回路に入力される合成電流値 I [A] を算出せよ。

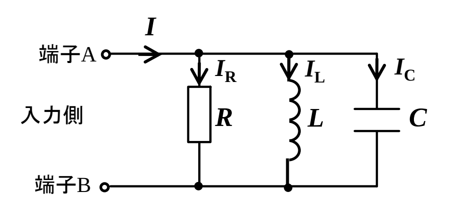

図 1　LCR 並列回路

(a-2) この時の力率（ $= \cos\theta$、なお θ は交流回路のベクトル図にて電圧に対する電流のなす角度）を算出せよ。解が割り切れない数値の場合、約分した分数で解答すること。

(a-3) 電流は進み電流と遅れ電流のどちらであるか、解答せよ。

(b) ここで **(a)** で用いた入力電源を LCR 並列回路から取り外し、十分に時間が経過した後、角周波数が $\omega (> 0)$ の電圧電源を入力側に接続した。その結果 $I = I_R (> 0)$ となった。

(b-1) 電源の角周波数 ω を $R, L, C, I, I_R, I_L, I_C$ 及び数値の全部或いはいずれかのみを用いて書き下せ。

(b-2) I_R と I_C の比 I_C / I_R, 及び I_R と I_L の比 I_L / I_R を $R, L, C, I, I_R, I_L, I_C, \omega$ 及び数値の全部或いはいずれかのみを用いて書き下せ。

[2] 図 2 (a) は n チャンネル MOS 型 FET（電界効果トランジスタ）を利用した増幅回路、(b) は回路中の FET の出力特性（静特性）である。図 2 (a) の回路中にある抵抗の抵抗値はそれぞれ $R_A = 20$ kΩ, $R_B = 40$ kΩ, $R_C = 4$ kΩ である。また、例えば V_{GS}（等）はゲート(G)－ソース(S) 間電圧（等）を表す。なお、記号の同じ空欄には同じ解答が当てはまる。以下の設問に答えよ（各設問 10 点）。

(2-1) 図 2 に示された FET はデプレッション型かエンハンスメント型か？

(2-2) 図 2 (a) の回路中の結合コンデンサは、入出力電圧信号から<u>　空欄（ア）　</u>成分を取り除き、<u>空欄（イ）　</u>成分を取り出すために用いられる。空欄（ア）、（イ）に当てはまる最も適切な語句を答えよ。

(2-3) 図 2 (a) の回路における電圧値 V_{GS} を算出せよ。

(2-4) 図 2 (a) の回路に入力された電圧信号 v_i の<u>空欄（イ）　</u>成分について、その振幅（最大値）が 1 V であった。この時、出力電圧信号 v_o の振幅（最大値）を、図 2 (b) を用いて求めよ。

(2-5) 設問 (2-4) の解答より、この時の図 2 (a) の回路の電圧増幅率（利得）を算出し、必ず<u>単位 dB（デシベル）を用いて</u>解答せよ。小数点以下は四捨五入し、整数で答えること。なお、$\log_{10} 2 \approx 0.30$, $\log_{10} 3 \approx 0.48$, $\log_{10} 5 \approx 0.70$, $\log_{10} 7 \approx 0.85$ として計算せよ。

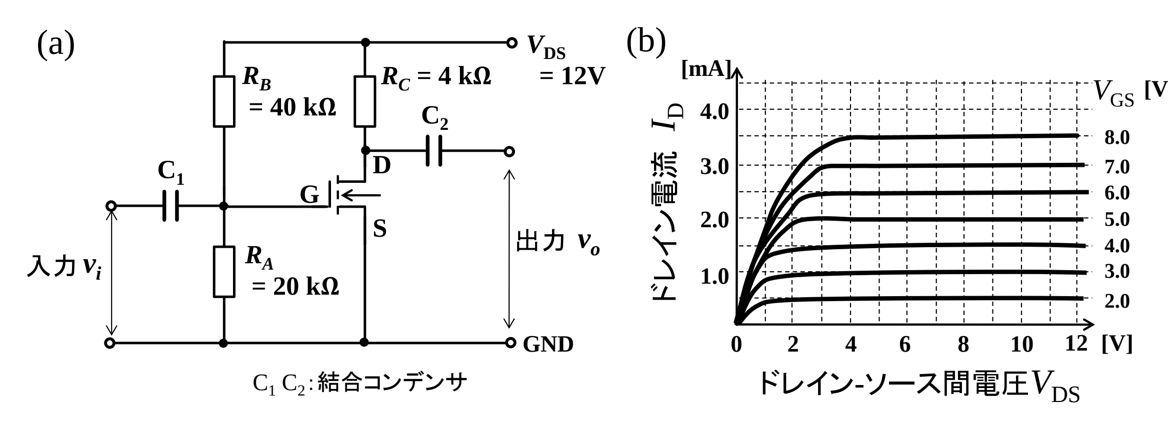

図 2 (a) MOS 型 FET を用いた増幅回路と(b) MOSFET の動作特性（静特性）