

2024年度実力テスト(午前の部)

2025年1月17日(金)

11:00～12:30 90分

解答上の注意

- ・ 問題は全部で3題ある。全てに解答すること。
- ・ すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。
- ・ 解答用紙の科目欄に問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が足りない場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。
- ・ 解答用紙はすべて提出すること。
- ・ 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出のうえ、退室を認める。。

午前の部 1 基礎物理数学<必須>

解答用紙には途中の計算経過、および論理も明確に記すこと。

1. 次の関数を $x = 0$ の周りで x の 2 次までテイラー展開せよ。
(a) $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. ここで $\log(x)$ は自然対数関数である。
2. 次の定積分を計算せよ。 $a > 0$ である。
(a) $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx$.
(b) $\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx$.
(c) $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx$.
3. $U(\vec{r}) = |\vec{r}|^{-p}$, $\vec{r} = (x, y, z)$, p は 0 ではない整数 とする。
(a) $\text{grad } U(\vec{r}) = \nabla U(\vec{r}) = \left(\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}\right)$ を計算せよ。
(b) $U(\vec{r} + \delta\vec{r})$ を $\delta\vec{r}$ の 1 次まで展開し $\nabla U(\vec{r})$ を用いて表せ。
4. 2 次元ベクトル関数 $\vec{G}(\vec{r}) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}\right) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$ の点 (a, a) から点 (b, b) に至る直線に沿っての線積分 $\int_{(a,a)}^{(b,b)} \vec{G}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ を計算せよ。 $0 < a < b$ は実数である。

午前の部 2 力学 I / II <必須>

- (1) 質量 m の質点の鉛直上方向を y 軸の正方向としたときの自由落下の運動方程式

$$m\ddot{y} = -mg$$

を用いて力学的エネルギーが保存することを示せ. ここで、 g は重力加速度とする.

- (2) 2つの質点が互いに力を及ぼし合いながら運動している (それぞれの質点に外力が作用しない) とき、それぞれの質点の運動量を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とすると、全運動量 $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ は保存することを示せ.

- (3) 2つの質点が互いに力を及ぼし合いながら運動している (それぞれの質点に外力が作用しない) とき、質点の座標原点まわりの角運動量を $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ とすると、全角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$ は保存することを示せ.

次に剛体について考える.

- (4) 質量 M の均一な質量密度を持つ、半径 a 、高さ h の円柱の中心軸周りの慣性モーメントが $\frac{1}{2}Ma^2$ となる事を示せ.

質量 M で、内径 R_1 、外径 $R_2 (> R_1)$ の中空の均一な質量密度をもつ高さ h の円柱が、角度 θ の斜面を滑らずに転がり落ちるとする. ここで、重力加速度を g とする.

- (5) この中空の円柱の中心軸周りの慣性モーメント I を求めよ.

- (6) 円柱の斜面方向の落下加速度を求めよ.

- (7) 円柱は、始めその中心が水平面から高さ l の位置で静止していた. 時刻 $t = 0$ に円柱が転がり始め、斜面を転がり落ちた後は、斜面との滑らかにつながった水平面を、滑らずに等速度で転がり続けた. 水平面上での円柱の進行速度を求めよ.

午前の部 3 電磁気学＜必須＞

- 半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ で電荷が分布している。
 - 導体内外の電場を求めよ。また、球の中心からの距離 r と電場の関係をグラフに示せ。
 - 球内外の静電ポテンシャルを求めよ。また、球の中心からの距離 r と静電ポテンシャルの関係をグラフに示せ。ただし、無限遠を基準点とする。
- 半径 a の無限に長い円柱状の導体内を電流 I が一様に流れている。円柱内外の磁場の大きさを求めよ。また、円柱の中心軸からの距離 r と磁場の関係をグラフに示せ。

- 図1のような自己インダクタンス L のコイル、抵抗 R 、電源 V からなる回路を考える。スイッチを A に入れて十分時間が経った後、スイッチを B に切り替えた。その時刻を $t = 0$ とし、スイッチを B に入れたあとの電流 $I(t)$ を L, R, V を用いて表し、そのグラフの概要を描け。

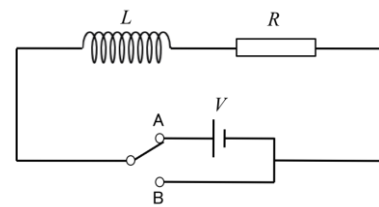


図1