

午後の部 1 量子力学 I <必須>

質量 m の粒子が、バネ定数 $k = m\omega^2$ のバネでつながれている。粒子は x 軸上を単振動する。バネが自然長を取るときを座標原点 $x = 0$ とする。粒子の位置エネルギーは $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ で表される。このとき、基底状態のエネルギーは $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ で、その波動関数はガウス型関数 $\varphi_0(x) = N \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x}{a})^2)$ で表される。ここで N は規格化定数で、定数 $a > 0$ は長さの次元を持ち、 $E_0 = \frac{1}{2}ka^2$ を満たす値を取る。

1. ハミルトニアンを具体的な式で記せ。
2. 波動関数 $\varphi_0(x)$ のグラフ（概略的でよい）を表し、粒子の存在できる x の範囲を根拠と共に示せ。
3. 古典力学における単振動を考える。振幅 $A (> 0)$ の単振動では、粒子は $-A \leq x \leq A$ の範囲を運動し、そのときの全エネルギーは $E = \frac{1}{2}kA^2$ で表される。粒子の存在できる x の範囲に関する古典力学と量子力学の違いについて説明せよ。
4. 量子力学において、最低エネルギーは上に記したとおり $E_0 > 0$ であるが、古典力学においてはエネルギーが最小の状態は座標原点において静止している $E = 0$ の状態である。量子力学において、このような古典力学の状態を取ることが許されないことを不確定性原理を元に説明せよ。

午後の部 2 統計力学 I <必須>

ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_B T$ とする。解答では、 T と β は混在していてもよいものとする。

1 温度 T の熱浴に接した系を統計力学的に解析するには、カノニカルアンサンブルの手法を用いる。カノニカルアンサンブルについて、以下の問いに答えよ。

1. 分配関数とはどのようなものか。「ボルツマン因子」という言葉を用いて、長くても50字以内を目安に簡潔に説明せよ。
2. 系の内部エネルギー U (= エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$) は系の分配関数 Z を用いて、以下のよう
に計算されることを示せ。

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$

3. エネルギーの揺らぎと定積熱容量 C との間には次の関係が成り立つことを示せ。

$$C = \frac{1}{k_B T^2} (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)$$

2 以下のハミルトニアンで記述される系を考える。

$$\mathcal{H} = -\sum_{n=1}^N h_n S_n$$

ここで、 S_n はサイト n におけるスピン変数であり、 $S_n = 1$ もしくは $S_n = -1$ の値をとる。 h_n はスピン変数 S_n に作用する外場であり、その値はサイト n に依存する。全サイト数を N とする。この系が熱浴に接し、熱平衡状態にあるものとする。

1. 熱浴の温度を T とする。

a この系の分配関数 Z は

$$Z = \prod_{n=1}^N Z_n$$

の形に書ける。 Z_n を求めよ。ここで \prod は積の記号である (以下参照)。

$$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_N$$

b. m 番目のスピン S_m の期待値を求めよ。

2. サイトに依存する外場が、ある定数 w を用いて $h_n = wn$ と書ける場合を考える。熱浴の温度が T の時の N 番目のスピンの期待値 $\langle S_N \rangle_T$ と熱浴の温度が T' の時の $N/2$ 番目のスピンの期待値 $\langle S_{N/2} \rangle_{T'}$ が等しい時、 T と T' の間に成り立つ関係を求めよ。

午後の部 3 量子力学Ⅱ <選択>

角運動量演算子 $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ の間には、以下の交換関係が成り立つ。

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \neq 0, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \neq 0, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \neq 0$$

演算子 $\hat{L}^2 \equiv \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ については

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

が成り立つ。このとき、球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ について、以下の式が成り立つ。

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

ここで l と m は $l \geq 0$ および $|m| \leq l$ を満たす整数である。また、昇降演算子 $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ に対しては、以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_{l, m+1}(\theta, \phi), \\ \hat{L}_- Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{l, m-1}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

問

1. (一部の例外を除き) $Y_{lm}(\theta, \phi)$ は演算子 \hat{L}_x の固有関数ではない。理由を述べよ。
2. ある状態の波動関数が $Y_{10}(\theta, \phi)$ で表される、すなわち量子数 $l=1, m=0$ の状態の場合を考える。この状態について \hat{L}_z および \hat{L}^2 を測定すると、どのような結果が得られるか。
3. 波動関数 $Y(\theta, \phi) \propto \hat{L}_x Y_{10}(\theta, \phi)$ で表される状態を考える。この状態について \hat{L}_z および \hat{L}^2 を測定すると、どのような結果が得られるか。(ここでは $\hat{L}_x = (\hat{L}_+ + \hat{L}_-)/2$ となることを用いて良い)

午後の部 4 固体物理<選択>

系の体積を V 、全電子数を N とする金属中自由電子を量子論の立場で考える。系の空間次元を3次元、電子の質量を m 、系の絶対温度を T として以下の問いに答えよ。

(1) 以下の文章の空欄にあてはまる最も適切な数式または語句を答えよ。

金属中自由電子の定常的量子状態は、 $-(\hbar^2 \nabla^2 / 2m)\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r})$ というシュレーディンガー方程式で記述され、その固有関数として $\varphi(\mathbf{r}) = (1/\sqrt{V})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ を用いると、エネルギー固有値 $E =$ (あ) を得る。自由電子の波動関数は運動量演算子 $\hat{p} =$ (い) の固有関数でもあるので、自由電子の速度は $\mathbf{v} =$ (う) と表される。固体結晶中では周期的境界条件から、自由電子の量子状態を表す (え) ベクトルの各成分が量子化され、電子がパウリの排他律に従う性質を考慮すると、 N 個の自由電子の基底状態は (え) 空間における (お) 球で表されることが分かる。その半径は電子スピンの自由度2を考慮すると、 N と V を用いて (か) で表される。

(2) (1)の(か)で求める半径を k_F と表し、(1)の(お)球の表面上にある自由電子のエネルギー固有値を E_F と表すと、その球に含まれる量子状態数とその状態密度 $D(E)$ について以下の関係式が成り立つ。これを用いて、自由電子の状態密度 $D(E)$ を自由電子のエネルギー E の関数として求めよ。

$$\frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k = \int_0^{E_F} D(E) dE$$

(3) (2)の結果を用いて、基底状態における自由電子の内部エネルギー密度 $u(\equiv U/V) = \int_0^{E_F} ED(E)dE$ を求め、 E_F と電子密度 $n(\equiv N/V)$ を用いて表せ。

(4) 有限温度の内部エネルギー密度は、フェルミ・ディラック分布関数 $f(E, T)$ を用いて、 $u = \int_0^{E_F} ED(E)f(E, T)dE$ と表され、フェルミ温度より十分小さい温度領域では、

$$u \sim \int_{-\infty}^{E_F} ED(E)dE + E_F D(E_F)(\mu - E_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left(\frac{d}{dE} (ED(E)) \right)_{E=\mu}$$

と近似される。この近似式を用いて、内部エネルギー密度の温度依存性 $u(T)$ を求めよ。ただし、 μ はフェルミ・ディラック分布関数に含まれる化学ポテンシャルであり、絶対零度で E_F に一致することから、次式が成り立つことを用いてよい。

$$D(E_F)(\mu - E_F) + \frac{\pi^2}{6} D'(\mu)(k_B T)^2 = 0$$

(5) 実際の金属では、自由電子の運動は周期的ポテンシャルの影響を受け、ブロッホ関数で量子状態が表されるブロッホ電子状態が実現する。上記した自由電子の波動関数 $\varphi(\mathbf{r}) = (1/\sqrt{V})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ とブロッホ関数との違いを具体的に説明し、ブロッホ電子の速度 \mathbf{v} が何によって決まるのかを分かりやすく説明せよ。

午後の部 5

相対論＋原子核物理／場と粒子〈選択〉

以下に示す5つの物理定数

- 真空中の光速 $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
- プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
- 万有引力定数 $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- 電子の静止質量 $m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- 電荷素量 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

について以下の問に答えよ。

1. 上記の物理定数の中から任意の2つを選び、それらの実験的な測定方法を述べよ。
2. ある粒子の静止質量を M_X とする。物理定数 h, c , および M_X のみを用いて、長さの次元をもつ量 l_c を作れ。
3. さらに、物理定数 G, c および M_X のみを用いて、長さの次元をもつ量 l_g を作れ。
4. $l_c = l_g$ となる M_X を求めよ。答える数字は桁(=けた)だけでも良いが単位をつけること。「桁でも良い」とは、「たとえば、 $A = 5.678 \times 10^9$ という値を『 $A = 10^9$ 』と書いても『 $A = 10^{10}$ 』と書いても両方とも正答とする」という意味である。
5. さらに、 $E_p = M_X c^2$ の値を eV(=電子ボルト)単位で桁で答えよ。また、 M_X という質量を持つ粒子があるとすれば、それはどのような性質を持つと推測されるか、考えを述べよ。

午後の部 6 電気・電子回路<選択>

実際の電圧増幅器（アンプ）は多かれ少なかれ雑音（ノイズ）を発生し、往々にしてトラブルの原因となる。図1はノイズ電圧を低減するための一連の工夫についてを表す。ここでは電圧増幅率が G で与えられる理想的な増幅器（=ノイズを発生しない）と電圧源（=ノイズ発生源）を組み合わせており、実質上ノイズを伴う理想的アンプを扱うことでノイズ電圧の低減化の原理を紐解こう。

まず図1(a)は、 v_s で与えられる信号電圧が回路に入力された後、増幅率が G ($\neq \infty$) の理想的なアンプ I により増幅され、それに v_d のノイズ電圧が（回路中の電圧源 A により）加算されて、それらが v_o の電圧として出力されることを表す。
(1-1) v_o を、必ず v_s, G, v_d を用いて式で表せ。なお必要ならばその他の変数や数値も用いてよい（このことは以下の設問でも同じであり、以下、同記載は省略する）。

次に図1(b)は、図1(a)と同じ入力 v_s により同じ出力 v_o を発生する回路を表し、実効的に図1(a)の等価回路である。ここで出力 v_n の電圧源 B は図1(a)の回路と等価のノイズを回路から出力させるために設定された電源である。

(1-2) v_n を、必ず G, v_d を用いて式で表せ。

さて、図1(c)は図1(b)の回路に負帰還を導入した回路を表す。点線で囲った部分が負帰還回路部である。ここで、 v_i はアンプ I の入力電圧、 h は電圧帰還率、 v_f は帰還素子の出力電圧である。

(1-3) v_i を、必ず v_n, v_f を用いて式で表せ。

(1-4) v_f を、必ず h を用いて式で表せ。

(1-5) 負帰還回路部の開ループ利得を、 v_s, v_f, v_o, v_n 中の何れかの変数を用いて式で表せ。

(1-6) 負帰還回路部の閉ループ利得を、必ず G と h を用いて式で表せ。

(1-7) 負帰還回路部を導入することで、もともと v_d であったノイズ電圧は低減化されて回路より出力されることが判る。低減化されたノイズ電圧を、 v_d, G, h を用いて式で表せ。

なお、負帰還回路部を導入すると、ノイズのみならず入力信号電圧の増幅率も低減化されて出力されることとなる。そこで、図1(d)の様に増幅率 G' ($\neq \infty$) の（理想的な）アンプ II を導入し、本回路における入力信号の実効的な増幅率を G に戻すことを目論む。

(1-8) G' を、必ず G, h を用いて式で表せ。

図1(e)は負帰還回路部を具体的に示しており、増幅率 A ($= \infty$) の理想的なオペアンプ、及び抵抗値が R_i, R_f, R_1, R_2 の4つの抵抗から構成される。また、 $G = 20$ dB、 $h = -40$ dB であったとする。

(1-9) 抵抗値 R_f と R_i の比、 R_f/R_i の値を算出せよ。

(1-10) 抵抗値 $R_1 = 10$ k Ω であったとする。この時、抵抗値 R_2 の値を算出せよ。

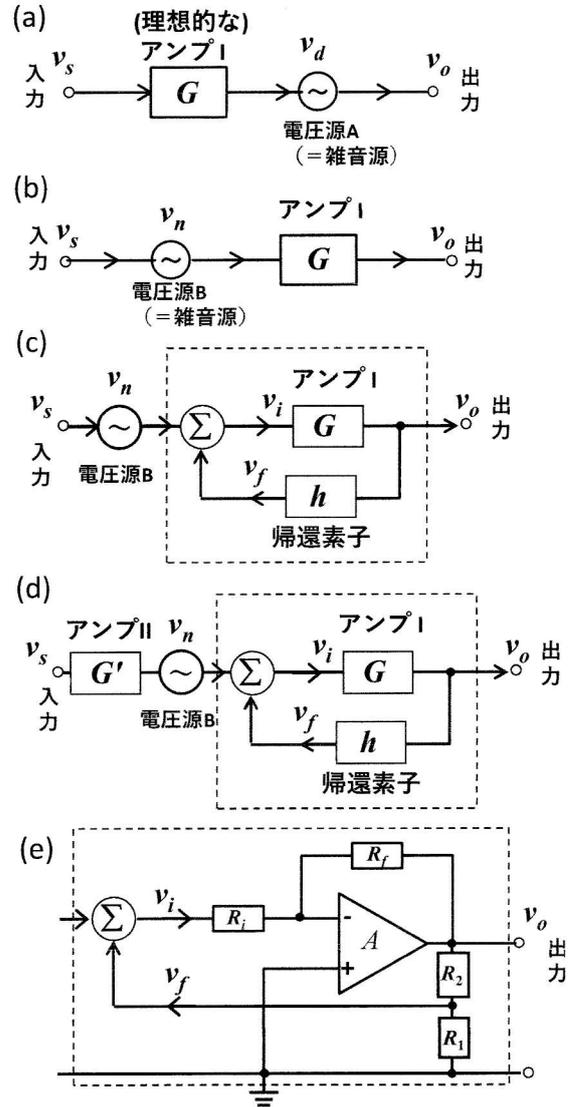


図1 アンプのノイズと負帰還回路