2022年度実力テスト（専門物理問題）

2023年1月20日（金）

12:50～14:50　120分

解答上の注意

- 問題は全部で7題ある。
  最初の3題、電磁気学、量子力学Ｉ、統計力学Ｉは必ず解答すること。
  残り4題は選択問題である。うち2問を選択し解答すること。

- すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

- 答案は解答用紙の該当欄に選択した問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

- 解答用紙はすべて提出すること。

- 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出のうえ、退室を認める。

専門物理問題1　＜必須＞　電磁気学

1. 半径 a の導体球に電荷 Q を帯電させた。

(1) 導体球内外の電場を求めよ。

(2) 導体球内外の静電ポテンシャルを求めよ。

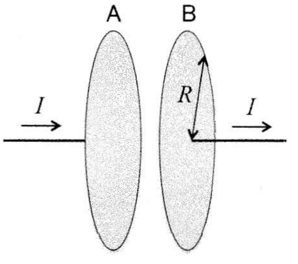
2. x 軸方向には大きさ E の一様な電場が、y 軸方向には大きさ B の一様な磁場がかかっている。この空間内での質量 m の電荷 q の運動を考えよう。時刻 $t=0$ において電荷は原点で静止していた。

(1) 速度を $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ として、各成分の運動方程式をたてよ。

(2) (1)より変数が v_x のみの方程式を導き、これを解いて v_x を求めよ。

(3) 速度 $\vec{v}$ のその他の成分を求めよ。

3. 極板間隔 d、半径 R の円形の平行板コンデンサーを考える。



(1) 電荷 $\pm Q$ を与えたときのコンデンサー内の電場の大きさを求めよ。

(2) その後、右図のように導線をつないで放電させると極板 B から A に向かって導線に電流 $I(t)$ が流れた。放電中に極板の間の空間に生じる変位電流の大きさと磁場の大きさを求めよ。

(3) (2)において極板上の電荷を $Q(t)$ として、時刻 t における極板間のポインティング・ベクトルの向きと大きさを求めよ。

専門物理問題2 ＜必須＞ 量子力学 I

長さ L の 1 次元リング上における質量 m の粒子の運動を考える。波動関数 $\varphi(x)$ は区間 $0 \leq x \leq L$ 上で定義される。以下の問に答えよ。ただし途中式も簡略に示すこと。

1. 波動関数 $\varphi(x)$ は周期的境界条件を満たす。この条件式を示せ。
2. 定常状態に関するシュレディンガー方程式の解として、波動関数 $\varphi(x) = N \exp(\mathrm{i}kx)$ が得られることを具体的に示せ。また、規格化定数 N を求めよ。
3. 周期的境界条件より、n 番目の準位についてエネルギー E_n と波動関数 $\varphi_n(x)$ を求めよ。ただし n は整数である。
4. これらの波動関数が、正規直交条件
$$\int_0^L dx \varphi_n^*(x)\varphi_{n'}(x) = \delta_{nn'}$$
を満たすことを示せ。ここで n、n' は整数で、$\delta_{nn'}$ はクロネッカーの δ である。
5. ある状態が上記の波動関数 $\varphi_n(x)$ であらわされるとき、この状態の運動量を観測するとどのような結果が得られるかを示せ。ただし運動量演算子は $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial x}$ で表される。
6. 波動関数 $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$ が与えられたときに、これを定常状態の波動関数の重ね合わせ
$$\varphi_{\mathrm{I}}(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$$
と表すことができる。ここで c_n は重ね合わせの重みと呼ばれる複素定数である。c_n を求める式を示せ。
7. ある状態が上記の波動関数 $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$ で表されるとき、この状態の運動量を観測するとどのような結果が得られるかを示せ。
8. 時間に依存するシュレディンガー方程式を示せ。
9. 時間に依存するシュレディンガー方程式の解を $\psi(x,t)$ と表すものとする。問 3 で求めた n 番目の準位に対して、対応する解 $\psi_n(x,t)$ を示せ。
10. 時刻 $t=0$ において、$\psi(x,0) = \varphi_{\mathrm{I}}(x)$ と表されたとする。このとき、$t>0$ における $\psi(x,t)$ を示せ。

専門物理問題3 ＜必須＞ 統計力学 I

1

離散的なエネルギー

$$\epsilon_n = \epsilon + n\Delta$$

をとる要素を考える ($n = 0, 1, \cdots, M;\ \Delta > 0$)。この要素一つのみからなる系が温度 T の熱浴とエネルギーをやりとりをし、熱平衡状態にある。ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_B T$ とする。解答では、T と β は混在していてもよいものとする。

1. この系の分配関数 Z_1 を求めよ。
2. この系のヘルムホルツ自由エネルギー F_1 を求めよ。

2

上で考えた要素 N 個からなる系を考える。要素間の相互作用は無視できるとする。

1. i 番目 $(1 \leq i \leq N)$ の要素のエネルギーを ϵ_{n_i} と記す。系全体のエネルギー E_N を求めよ。
2. この系の分配関数 Z_N を求めよ。

以下、要素の取りうるエネルギーに上限はない（$M \to \infty$）とする。

3. この系のヘルムホルツ自由エネルギー F_N を求めよ。
4. この系の内部エネルギー U_N を求めよ。

専門物理問題4 ＜選択＞ 量子力学Ⅱ

物理量を表す演算子を $\hat{A}$、$\hat{B}$、波動関数を φ_i とする。また a_i、b_i は定数（実数）を表すものとする。ただし $i = 1, 2, \ldots$ である。

問 1) 以下の空欄を埋めよ。

- 演算子 $\hat{A}$ について、固有値が a_i でその固有関数が φ_i なら、$\hat{A}$ と φ_i に対して式 $\boxed{\text{(a)}}$ が成り立つ。
- 状態がこの波動関数 φ_i で表されるとき、このような状態を物理量 $\hat{A}$ の固有状態と呼ぶ。このとき物理量 $\hat{A}$ を観測して得られる測定値は $A = \boxed{\text{(b)}}$ である。
- この波動関数 φ_i がさらに演算子 $\hat{B}$ の固有値 b_i に対する固有関数であるときに、$\hat{B}$ と φ_i に対してについて式 $\boxed{\text{(c)}}$ がさらに成り立つ。このとき波動関数 φ_i が表す状態は物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の $\boxed{\text{(d)}}$ と呼ばれる。
- このような状態について物理量 $\hat{A}$、$\hat{B}$ を観測して得られる測定値は、順に $A = \boxed{\text{(e)}}$、$B = \boxed{\text{(f)}}$ である。

問 2) 量子力学における不確定性原理について記述せよ。上記の物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ を例に取って説明しても良い。

問 3) 演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の間の交換関係はどのようなものになるか。

専門物理問題5 ＜選択＞ 固体物理

以下の文章の空欄(1)～(12)にあてはまる最も適切な数式または語句を答えると共に、以下の問Aと問Bに答えよ。

固体結晶の特徴である並進対称性や点対称性の検出には、格子定数よりも $\boxed{\quad(1)\quad}$ 波長を持つ量子ビーム（X 線や電子線など）の回折現象が用いられる。一般に量子ビームの波長λは、Planck 定数hと運動量pを用いて、$\lambda = \boxed{\quad(2)\quad}$ と与えられるので、$h = 6.6 \times 10^{-34}$ J・s、光速度$c = 3.0 \times 10^{8}$ m/s、電荷素量$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C を用いると、$\lambda = 0.50$ Åの波長をもつ X 線のエネルギーは、$E = \boxed{\quad(3)\quad}$ [keV]（有効数字 2 桁）となる。次に、(A) 結晶格子とその逆格子の基本ベクトルを各々、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$と$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$で表す場合、$\boldsymbol{b}_1 = 2\pi \times \boxed{\quad(4)\quad} / \boxed{\quad(5)\quad}$ と $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = \boxed{\quad(6)\quad}$ という関係が成り立つ。したがって、一辺の長さがaの単純立方格子の逆格子は、$\boxed{\quad(7)\quad}$ を一辺の長さとする $\boxed{\quad(8)\quad}$ 格子になる。

固体結晶中の各原子（またはイオン）は有限温度下で熱振動し、その振動が結晶中を伝搬する格子振動は固体の熱的性質の理解に重要となる。例えば、格子振動を調和振動子と仮定し、調和振動子の総数をN、Boltzmann 定数をk_Bとすると、調和振動子に対するエネルギー等分配則から古典描像の格子比熱が、$c_L = \boxed{\quad(9)\quad}$ と表され、Dulong-Petit の法則を説明する。しかし、格子比熱の温度変化を説明するには、格子振動を量子化した素励起（フォノン）が $\boxed{\quad(10)\quad}$ 統計に従う性質と格子振動の分散関係を考慮した量子論が必要となる。特に、格子比熱が低温領域で示す絶対温度の $\boxed{\quad(11)\quad}$ 乗に比例する温度依存性を定量的に説明するめには、(B) 波数ゼロの極限でも無限小エネルギーで励起できる $\boxed{\quad(12)\quad}$ モードの分散関係を考慮する必要がある。

問 A　下線部(A)のように表される固体結晶において、逆格子ベクトル$\boldsymbol{K}(= h\boldsymbol{b}_1 + k\boldsymbol{b}_2 + l\boldsymbol{b}_3)$（$h, k, l$は任意の整数）が、ミラー指数で表される格子面$(hkl)$と直交することを示せ。

（ヒント）格子面(hkl)は、h, k, lの逆数と任意の整数Mを用いて、$(M/h, 0,0)$と$(0, M/k, 0)$、$(0,0, M/l)$の３点を通る平面である。

問 B　下線部(B)において、分散関係を$\omega(\boldsymbol{k}) = c_s k$（$k = |\boldsymbol{k}|$）とおくとき、次式を用いて低温領域における格子比熱の温度依存性（すなわち、絶対温度のべき乗則）を示せ。

$$c_L = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{3}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\,\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{e^{\hbar\omega(\boldsymbol{k})/k_B T} - 1}\right]$$

もし、必要であれば、以下の結果を利用しても良い。

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

専門物理問題6 ＜選択＞
相対論＋原子核物理／場と粒子

1. S 系 $(ct,\ x,\ y,\ z)$ から S$'$ 系 $(ct',\ x',\ y',\ z')$ へのローレンツ変換を

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

で与えるとき、以下の問に答えよ。

(i) S 系で測って、速度 $v_0 = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ で x 軸方向へ運動する物体がある。S' 系で測って、この物体の速度が $v' = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ であった。v' を $v_0,\ \beta$ 等を用いて表せ。

(ii) (i) の結果のニュートン極限 $(v_0,\ v' \ll c)$ をとることで、ニュートン力学の速度の合成則を導け。

(iii) (i) の結果に $v_0 = c$ を代入することで、光速度不変の原理が成り立つことを確認せよ。

2. 静止質量 m, 速度 $v = \beta c = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ で x 軸方向に直線運動する物体の相対論的な運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = f \tag{2}$$

で与えられる。ここで、f は (物体の静止系で測ったときの) 物体に働く力を表す。

(i) 等加速度運動を考えよう。すなわち、$f = mc\omega_0$(ただし ω_0 は正の定数) とする。このとき (2) 式を解き、物体の位置 x を t の関数として求めよ。ただし、初期条件として時刻 $t = 0$ で $v = 0$ かつ $x = c/\omega_0$ を満たすように積分定数を定めよ。

(ii) (i) で求めた物体の軌跡を時空図 (ct–x 図) 上に示せ。さらに、この物体に情報を送ることのできない事象の領域を時空図中に示せ。

専門物理問題7 ＜選択＞ 電気・電子回路

図 1 の様な抵抗値 R の抵抗と電気容量 C のコンデンサーから成る、入力端子が AK、出力端子が DE の RC 四端子回路がある。入力・出力電圧はそれぞれ $v(t)$ 及び $v'(t)$ で、入力側には電流 $i(t)$ が流れるとする。

[1] 時刻 $t \leq 0$ の時 $v(t)=0$ 、$t>0$ の時 $v(t)=V(>0)$ のステップ電圧 $v(t)$ がこの回路の端子 AK 間に入力された時の、時刻 $t>0$ における出力電圧 $v'(t)$ をラプラス変換を利用して求めよう。なお、関数 $f(t)$ のラプラス変換 $L[f(t)]$ は

$$L[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\ dt$$

であり、また表 1 は幾つかの関数のラプラス変換表、表 2 はラプラス変換の幾つかの特徴である。

(1-1) 時刻 $t>0$ にて閉ループ ABHKA に成立するキルヒホフの法則 （電圧降下）の式を $V, R, C, i(t)$, 及びコンデンサーに蓄えられる電気量 $q(t)$ を用いて式で表せ。

(1-2) コンデンサーの電気量 $q(t)$ と電流 $i(t)$ の間に成り立つ関係を式で表せ。

(1-3) これらの設問の結果を用いて、時刻 $t>0$ における $Q(s)$ ($= \int_0^\infty q(t)e^{-st}\ dt \equiv L[q(t)]$) を、V, R, C (及び s) を用いて式で表せ。但し時刻 $t=0$ において $q(t=0)=0$ である。

(1-4) 以上の設問の結果を用いて、時刻 $t>0$ におけるコンデンサーの電気量 $q(t)$ を最も適切に式で表せ。

(1-5) 設問 (1-4) の結果を用いて、時刻 $t>0$ における出力電圧 $v'(t)$ を最も適切に式で表せ。

[2] 四端子回路の電圧伝達特性 $F(j\omega)$ は次式

$$F(j\omega) = K/(1+j\omega T) \qquad \text{(2A)}$$

で与えられるとする。但し K, T は回路によって決まる定数であり、また ω は電圧信号の角周波数、j は虚数単位である。

(2-1) 四端子回路の電圧利得 G、及び、入出力電圧の位相のずれを表す位相角 ϕ のそれぞれを与える式 (2B) 及び (2C) について、空欄 (ア) 及び 空欄 (イ) に当てはまる変数を解答せよ。

$$G \equiv 20\log|F(j\omega)| = 20\log K - 10\log(1+ \text{空欄 (ア)}) \qquad \text{(2B)}$$

$$\phi = -\tan^{-1} \text{空欄 (イ)} \qquad \text{(2C)}$$

以下、図 1 の RC 回路における電圧利得 G の角周波数特性を知るために、RC 回路の電圧利得 G に関するボード（ボーデ）線図を作成する。具体的には、低角周波数領域 ($1 \gg$ 空欄 (ア))、及び、高角周波数領域 ($1 \ll$ 空欄 (ア)) のそれぞれの領域における G の ω 依存性を、式 (2B) に基づきグラフ（図 2 参照）に記入（プロット）する。この時、これら 2 つのプロットの漸近線が空欄 (ア) = 1 となる角周波数 $\omega = \omega_s$（折点角周波数）にて交わる様作図することで、ボード（ボーデ）線図を完成させる。

(2-2) 図 1 の RC 回路の入力電圧が $v(t) = v_0 e^{j\omega t}$ であったとする。但し v_0 は実数である。この場合についての式 (2A) の K 及び T を、数値や変数を用いて最も適切に解答せよ。

以下の設問 (2-3), (2-4) では、$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 1\ \mathrm{mF}$ とせよ。

(2-3) 折点角周波数 ω_s の値を解答せよ。

(2-4) 図 1 の RC 回路における電圧利得 G の角周波数特性を表すボード（ボーデ）線図を、図 2 のグラフの目盛り（プロット範囲）をそのまま利用して（書き写して）解答用紙に作図せよ。

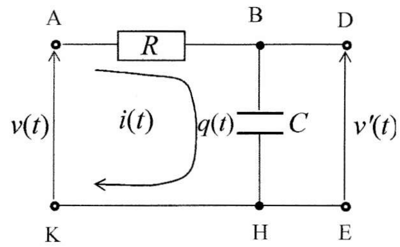


図 1 RC 四端子回路

表 1 ラプラス変換表

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
e^{-at}	$1/(s+a)$
$t\,e^{-at}$	$1/(s+a)^2$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$

但し a :定数, ω:角周波数

表 2 ラプラス変換の幾つかの特徴

$L[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,F(s) + b\,G(s)$
$L[\frac{df}{dt}] = sF(s) - f(t=0)$
$L\left[\int_0^t f(t')dt'\right] = \frac{1}{s}F(s)$

但し a, b : 比例定数

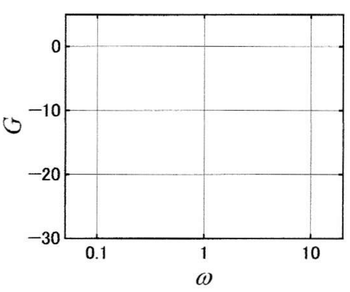


図 2 G に関するボード（ボーデ）線図作成のための片対数グラフ