

2022年度実力テスト(基礎物理問題)

2023年1月20日(金)

11:00~12:00 60分

解答上の注意

- ・ 問題は全部で2題ある。全てに解答すること。
- ・ すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。
- ・ 解答用紙の所定欄に問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。
- ・ 解答用紙はすべて提出すること。
- ・ 途中退出は不可とする。

基礎物理問題1 基礎物理数学

解答には途中の計算経過、および論理も明確に記すこと。もし、問題に不十分な点、誤った点があれば、その点を明記した上で自分で問題を修正し解答せよ。

1. 関数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ を $x=0$ の周りで x^2 の次数までテイラー展開せよ。

2. a を正の実数とする。以下の積分の結果を示せ。または計算せよ。

$$(i) \quad \int_{-1}^1 dx \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \int_0^a dx \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(iii) \quad \int_0^{\infty} dx x \exp\{-ax\}$$

3. p は 0 でない実数、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\Delta\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ であり

$$f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^p = (x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}$$

とする。 $f(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ を $\Delta\mathbf{r}$ の一次まで展開し、 $p, \mathbf{r}, |\mathbf{r}|, \Delta\mathbf{r}$ により表せ。

4. a, b を実数とする。ベクトル場

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left(\frac{ay}{x^2 + y^2}, -\frac{ax}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

の $(0, b, 0)$ から $(b, 0, 0)$ に向かう直線に沿っての線積分を計算せよ。

基礎物理問題2 力学 I / II

地上で自由落下する物体に働くコリオリ力を考える。下図は、北極と南極を通る地球の断面とし、地球の緯度 $\lambda (> 0)$ の地表での自由落下運動を考える。 z 軸は地表に対して垂直、 y 軸は北側、そして、 x 軸は紙面の奥方向に定義し、 (x, y, z) は、地表に固定した地球とともに回転する座標系とする (下図参照)。この座標系での質点の位置ベクトルを \mathbf{r} 、地球自転の角速度を $\boldsymbol{\omega}$ 、そして、重力加速度を \mathbf{g} とする。ただし、 $\boldsymbol{\omega}$ の2次のオーダーの量 (例えば、遠心力) は無視する。

- (1) 地球の自転とともに回転する観測者から見た、質量 m をもつ質点の運動方程式を書け。
- (2) x, y, z 成分それぞれの運動方程式を書け。
- (3) コリオリ力が重力に比べて非常に小さく、また、速度の x 成分と y 成分はその z 成分に比べて非常に小さいとして、(2) の運動方程式の x 成分と z 成分を近似せよ。
- (4) 時刻 $t=0$ で質点が地表からの高さ h から落下したとして (質点の x 成分の初期位置は $x=0$ とする)、運動方程式を解き、 x の軌道の式を示せ。
- (5) (4) の結果を踏まえて、コリオリ力により自由落下の軌道はどのように変化するか述べよ。

