2021年度実力テスト（専門物理問題）

2022年1月20日（木）

12:50〜14:50　120分

解答上の注意

- 問題は全部で7題ある。
  最初の3題、電磁気学、量子力学Ｉ、統計力学Ｉは必ず解答すること。
  残り4題は選択問題である。うち2問を選択し解答すること。

- すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

- 答案は解答用紙の該当欄に選択した問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

- 解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

- 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出のうえ、退室を認める。

専門物理問題1　＜必須＞　電磁気学

1. 無限に長い直線に電荷が線密度 λ で一様に分布している。この直線電荷から距離 r 離れた位置における電場 $E(r)$ と静電ポテンシャル $\phi(r)$ の大きさを求めよ。ただし、$r = r_0$ を基準点とする。

2. 無限に長い直線導線中を定常電流 I が流れている。この導線から距離 r 離れた位置における磁場 $B(r)$ とベクトルポテンシャル $A(r)$ の大きさを求め、またそれらの向きを図示せよ。ただし、$r = r_0$ を基準点とする。

3. x 軸の正と負の向きにそれぞれ進む２つの電磁波を考える。電場は y 軸方向に振動し、それらの大きさは

$$E_1(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t), \qquad E_2(x,t) = E_0 \sin(kx + \omega t)$$

で与えられるとする。

(1) 自由空間（電荷密度と電流密度の値がゼロであるような空間）におけるマックスウェルの方程式を記せ。

(2) それぞれの電磁波の磁場の大きさ $B_1(x,t)$, $B_2(x,t)$ と振動方向を求めよ。ただし、電磁波の速度を c とする。

(3) これらの電磁波の重ね合わせによって生じる電場および磁場の振動 $E(x,t)$, $B(x,t)$ を求めよ。

専門物理問題2　＜必須＞　量子力学 I

井戸の壁が無限に高い1次元井戸型ポテンシャルを考える。質量 m の粒子が区間 $0 \leq x \leq L$ に閉じ込められている。この区間におけるポテンシャルエネルギーは $V(x) = 0$ であるものとする。以下の問いに答えよ。計算の過程も簡略に示せ。

1. エネルギーを E、波動関数を $\varphi(x)$ とする。定常状態に対するシュレディンガー方程式を具体的に微分方程式の形で書き表せ。また、境界条件を示せ。

2. エネルギーの低い順に、エネルギー準位を E_1、E_2、... とし、その波動関数を順に $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$、... とする。シュレディンガー方程式を解き、n 番目の準位について、E_n と $\varphi_n(x)$ を求めよ。ただし $\varphi_n(x)$ は規格化されているものとする。

3. $n = 1, 2, 3$ について、波動関数 $\varphi_n(x)$ のグラフを横軸に x をとって描け。特徴がわかるように工夫すること。

4. 次に、時間に依存するシュレディンガー方程式 $\mathrm{i}\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \hat{\mathcal{H}}\psi(x,t)$ の解を考える。前問で求めた n 番目の準位に対しては、波動関数 ψ は、$\psi_n(x,t) = \varphi_n(x)\exp(-\mathrm{i}\omega_n t)$ と表される。ω_n を求めよ。

5. 定常状態に対するシュレディンガー方程式から導かれた $\psi_n(x,t)$ が、たしかに定常状態を表すことを示せ。

6. 波動関数として、$n = 1$ と $n = 2$ の重ね合わせ $\psi(x,t) = N\left(\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)\right)$ を考える。規格化定数 N を求めよ。また、$|\psi|^2$ が時間変化することを示せ。

7. 前問の $\psi(x,t)$ で表される状態について、時刻 $t = 0$ においてエネルギーを測定した。観測結果がどうなるか説明せよ。また、エネルギーの期待値を求めよ。

専門物理問題3 ＜必須＞ 統計力学 I

プランク定数を h、ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_BT$ とする。解答では、T と β は混在していてもよいものとする。

質量 m、角振動数 ω を持つ自由度1の調和振動子の古典的ハミルトニアンは次式のように与えられる。

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

ここで、x、p はそれぞれ振動子の位置、運動量を表す。以下、このような調和振動子が温度 T の熱浴に接しているとする。

1

まず、調和振動子が一つだけの場合を考える。統計力学の古典近似によると、この系の古典的な分配関数 Z_1 は次のように計算される。

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp\ e^{-\beta H(x,p)}$$

1. 上の積分を実行し、この系の分配関数 Z_1 を求めよ。
2. この系のエネルギーの期待値 $\langle H \rangle$ を求めよ。
3. 調和振動子の位置の期待値 $\langle x \rangle$ と分散 $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。
4. 調和振動子の運動量の期待値 $\langle p \rangle$ と分散 $\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

2

次に、局在した調和振動子が N 個からなる系を考える。全ての振動子は同等 (質量 m、角振動数 ω) であり、振動子間の相互作用は無視できるとする。

1. この系の古典的分配関数 Z_N を計算せよ。但し、各々の振動子は局在しているため、同種粒子を区別できないことに起因する因子 $1/N!$ は必要ないことに留意せよ。
2. この系のエネルギーの期待値を求めよ。

専門物理問題4　＜選択＞　量子力学Ⅱ

パウリ行列は $\hat{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma_y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で定義される。以下の問題では、スピン演算子 $\hat{\vec{S}}$ はパウリ行列によって $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}$ とあらわされることを用いよ。ここで、$\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma_x}, \hat{\sigma_y}, \hat{\sigma_z})$ である。

問1． 以下の問に答えよ。計算の過程も必ず示すこと。

1-1) スピン演算子 $\hat{S}^2 = \hat{S}_x{}^2 + \hat{S}_y{}^2 + \hat{S}_z{}^2$ を行列であらわせ。

1-2) 以下のスピン演算子の交換積を、行列を用いて計算せよ。
(a) $[\hat{S}_y, \hat{S}_z]$、　(b) $[\hat{S}_z, \hat{S}_x]$ 、　(c) $[\hat{S}^2, \hat{S}_z]$

1-3) $\hat{S}_z$ の固有値および固有ベクトル（スピノル）を全て示せ。

問2． x 軸方向の磁場 $\vec{H} = (H, 0, 0)$ 下での電子の状態を考える。ただし $H > 0$ とする。電子のスピン磁気モーメントをあらわす演算子 $\hat{\vec{M}}$ は、ボーア磁子 μ_{B}（> 0）を用いて $\hat{\vec{M}} = -\mu_{\mathrm{B}}\hat{\vec{\sigma}}$ とあらわされる。以下の問に答えよ。計算の過程も簡略に示すこと。

2-1) スピンのハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}} = -\vec{H} \cdot \hat{\vec{M}}$ を行列で表せ。

2-2) このときのエネルギー準位をすべて求めよ。

2-3) 基底状態について、固有ベクトル（スピノル）を求めよ。

専門物理問題5 ＜選択＞ 固体物理

以下の文章の空欄(1)～(10)にあてはまる最も適切な数式または語句を答えると共に、以下の問Aと問Bに答えよ。

固体（金属または半導体）中の自由電子密度をn、速度を$\boldsymbol{v}$、自由電子の電荷を$e(e<0)$とするとき、単位時間に単位面積を通過する電荷量が自由電子の電流密度に等しいので、電流密度は、$\boldsymbol{j}=$ $\boxed{\quad(1)\quad}$ となる。固体試料中に一様な直流電場$\boldsymbol{E}$が与えられた場合の自由電子の運動を古典的 Drude 理論で考えてみよう。自由電子の質量をm、散乱時間をτとすると、自由電子の運動方程式は、$m(d\boldsymbol{v}/dt)=$ $\boxed{\quad(2)\quad}$ となる。定常状態では、$d\boldsymbol{v}/dt\to 0$となることを考慮すると、定常状態における自由電子の速度は、$\boldsymbol{v}=$ $\boxed{\quad(3)\quad}$ となる。この結果を空欄(1)へ代入し、オームの法則と比べると直流電気伝導度の表式、$\sigma=$ $\boxed{\quad(4)\quad}$ が得られる。一方、固体中の自由電子は熱輸送にも寄与する。電流であれば電荷を、熱流であれば運動エネルギーを自由電子が運ぶと考えると、電子 1 個の運動エネルギーを$\mathcal{E}$として、電流密度の表式と同様に自由電子が運ぶ熱流密度の表式、$\boldsymbol{j}_q=$ $\boxed{\quad(5)\quad}$ が得られる。Drude 理論では、自由電子を相互作用が無視できる古典粒子として扱うので、エネルギー等分配則を用いると、$\mathcal{E}$ は絶対温度Tの関数と見なされる（すなわち、$\mathcal{E}=\mathcal{E}(T)$）。この時、自由電子気体の単位体積当たりの比熱$c_V\left(\equiv n(d\mathcal{E}/dT)\right)$は、Boltzmann 定数$k_{\mathrm{B}}$を用いて、$c_V=$ $\boxed{\quad(6)\quad}$ となる。試料中の温度の空間勾配$\boldsymbol{\nabla}T$によって高温側から低温側に熱流が発生することを考えると、$\boldsymbol{j}_q$の向きは$\boldsymbol{\nabla}T$と $\boxed{\quad(7)\quad}$ であり、$\boldsymbol{j}_q$の大きさは$\boldsymbol{\nabla}T$の大きさに $\boxed{\quad(8)\quad}$ するので、自由電子の熱伝導度κの表式が求められる。試料中のある位置x（温度をTとする）を流れる熱流密度のx成分が、その位置からx軸の正の向きに$\pm v_x\tau$離れた位置（温度を$T\mp(v_x\tau)\times(dT/dx)$とする）から互いに逆向きに流れ込む熱流密度の和で与えられる（すなわち、$\left(\boldsymbol{j}_q[x]\right)_x=(1/2)\left[\left(\boldsymbol{j}_q[x+v_x\tau]\right)_x+\left(\boldsymbol{j}_q[x-v_x\tau]\right)_x\right]$）とき、微小量$v_x\tau$の 1 次の範囲で$\left(\boldsymbol{j}_q\right)_x$を計算すると、$\left(\boldsymbol{j}_q\right)_x=$ $\boxed{\quad(9)\quad}$ $\times c_V(-dT/dx)$となる。ここで、$v_x^2=v^2/3$を用いると、$\boldsymbol{j}_q=$ $\boxed{\quad(10)\quad}$ $\times(-\boldsymbol{\nabla}T)$という関係が得られ、熱伝導度の表式が求められる。

問A　空欄(6)で得られる比熱の値は、室温における金属の比熱よりも 2 桁程度大きな値となり、古典的 Drude 理論の限界を示している。この違いが何によって決まるのかを、自由電子の量子論とフェルミ統計の立場から説明せよ。

問B　量子論では、波数kで表される空間的に広がった平面波によって自由電子の量子状態が記述され、電子 1 個の運動エネルギーは、$\mathcal{E}(k)=\hbar^2k^2/2m$と表される。また、自由電子気体の内部エネルギーは、電子スピンの自由度を考慮して、

$$U=2\sum_{k<k_F}\mathcal{E}(k)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F}2\mathcal{E}(k)d^3\boldsymbol{k}$$

と表される。ここで、k_Fはフェルミ波数、Vは系の体積、積分は波数空間の体積分を表す。このとき、絶対零度におけるN個の 3 次元自由電子気体の内部エネルギーを、フェルミエネルギーE_Fを用いて表せ。また、k_FやE_Fの大きさを決める物理量が何かを説明せよ。

専門物理問題6 ＜選択＞
相対論＋原子核物理／場と粒子

実験室系 (つまり観測者の静止系) $S(t,\, x,\, y,\, z)$ において、x 軸の正の方向に速さ $v = \beta c$ で運動する光源があり、光源は x 軸に対して角度 θ の方向に角振動数 ω の電磁波を放射した。この電磁波を光源の静止系 $S'(t',\, x',\, y',\, z')$ で測定すると、電磁波は x' 軸に対して角度 θ' の方向に放射され、さらに角振動数は ω' であった。電磁波は真空中を伝わるものとする。以下の設問に答えよ。

(1) S 系から S' 系への座標変換 (ローレンツ変換) を、β および $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ を用いて書き下せ。

(2) S 系で測定した電磁波の波数ベクトルを $\vec{k} = (k_x,\, k_y,\, k_z)$ とする。このとき、ω と $|\vec{k}|$ の関係を書き下せ。同様に、S' 系で測定した電磁波の波数ベクトルを $\vec{k'} = (k'_x,\, k'_y,\, k'_z)$ とするとき、ω' と $|\vec{k'}|$ の関係を書き下せ。

(3) 電磁波の 4 元波数ベクトル $(\omega,\, ck_x,\, ck_y,\, ck_z)$ の変換則を考えることにより、S 系で測定される電磁波の角振動数 ω' を $\omega, \theta, \gamma, \beta$ を用いて表せ。さらに、$\cos\theta'$ を θ と β を用いて表せ。

(4) $\gamma \gg 1$ のとき、S' 系で見て光源の運動方向前方 $(-\pi/2 < \theta' < \pi/2)$ に等方的に放射された電磁波は、S 系でみると運動方向 (x 軸方向) に絞られることを示せ。

専門物理問題7 ＜選択＞ 電気・電子回路

[1] 抵抗値 R の抵抗、電気容量 C のコンデンサー、及びインダクタンス L のコイルを利用したいくつかの交流回路に関する以下の設問に答えよ。なお、回路の入出力信号の角周波数は ω であり、また、虚数単位は j で表すものとする。

(1-1) まず、抵抗、コンデンサー、コイルそれぞれの複素インピーダンスを書き下せ（12 点）。

さて、図 1(a) の様な抵抗、コンデンサー、コイルが直列に接続された、いわゆる RCL 直列回路がある。この回路の：

(1-2) 合成複素インピーダンスを書き下せ（8 点）。

(1-3) 共振角周波数 ω_0 を最も適切に書き下せ（8 点）。

次に図 1(b) の様な抵抗とコンデンサーから成る CR 四端子回路について考える。

(1-4) 図 1(b) の様に本回路の入力側の電圧と電流がそれぞれ v_1 及び i_1、出力側の電圧と電流がそれぞれ v_2 及び i_2 と表され、これらが次式

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{(1a)} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \equiv F \quad \text{(1b)}$$

で与えられる関係にある場合、式 (1b) で与えられる 2 行 2 列行列、即ち縦続行列 F の各要素 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を、数値、抵抗値 R、電気容量 C、入出力電圧・電流の角周波数 ω、及び虚数単位 j のすべてあるいはいずれかを用いて書き下せ（32 点）。

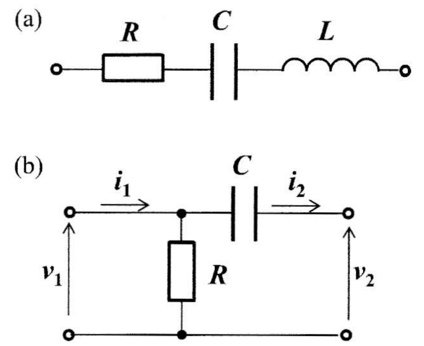

図 1 (a) RCL 直列回路、及び (b) CR 四端子回路

最後に、電流増幅率（利得）が G の増幅器 A と図 1(b) の CR 回路 3 セットから成る CR 発振回路について考える（図 2(a) 参照）。図 2(b) は本発振回路が**理想的な**発振回路であるとした場合の動作原理を表す電流正帰還回路のブロック図である。図中の i_i, i_o, i_f はその箇所での電流を表し、また v_i, v_o は増幅器 A の入力及び出力電圧である。

(1-5) 図 2(a) の RC 発振回路の電流帰還率 h の値を算出する場合、まずは、i_i と i_o の間に成り立つ関係を求めるべく式 (1) で定義される縦続行列 F を＿（ア）＿乗することから始めなければならない。空欄（ア）にあてはまる数値を書き下せ（5 点）。

(1-6) 設問 (1-5) の計算を設問 (1-4) の解答を利用して実行すると次式の関係が得られる：

$$i_o = \left\{\frac{(3-k^2)-j4k}{R}\right\} v_i + \{(1-5k^2) - jk(6-k^2)\}\, i_i \quad (2a) \qquad \text{ただし} \quad k = \frac{1}{\omega RC} \quad (2b)$$

ここで、本 CR 回路中の電流増幅器 A を、入力インピーダンスが近似的に 0 であるものを用いること、及び、(2a) 式の虚数成分が 0 であるとすることで、CR 発振回路の電流帰還率 h の値を算出できる。電流帰還率 h の値を算出せよ（10 点）。

(1-7) 本回路が**理想的な**発振回路として動作する時に満たされるべき条件を式で表せ（10 点）。

(1-8) 設問 (1-6), (1-7) から直接導き出される、増幅器 A の電流増幅率 G が満たすべき条件を式で表せ（10 点）。

(1-9) 本発振回路の発振角周波数（共振角周波数）ω_0 を最も適切に書き下せ（5 点）。

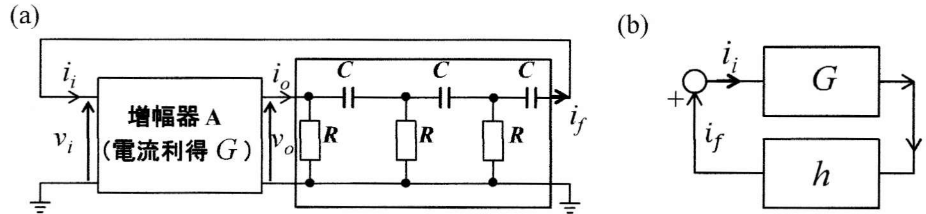

図 2 (a) CR 発振器、及び (b) 電流正帰還回路のブロック図