問題1　　力学

ケプラーは膨大な惑星観測データを解析し、惑星運動に関する3つの法則を発見した.

第1法則: 惑星は太陽を焦点の1つとする楕円軌道を運動する.

第2法則: 惑星と太陽をむすぶ動径が単位時間に掃く面積は、時間によらず一定である.

第3法則: 楕円軌道の長半径 a と公転周期 T の間には $T^2 = Ca^3$ の関係がある (比例定数 C は全惑星に共通な定数).

以下の問に答えよ.

問1. 太陽の質量を M、惑星の質量を m とし、太陽を原点とする極座標 (r, θ) を選んだ時、r および、θ 成分の運動方程式を書け.

問2. ケプラーの第1法則を示せ. ただし、焦点を極とする楕円の式は $r = \dfrac{l}{e\cos(\theta+\alpha)+1}$ (e: 離心率、l: 半直弦、α: 位相差) で表される事を用いても良い.

問3. ケプラーの第2法則を示せ.

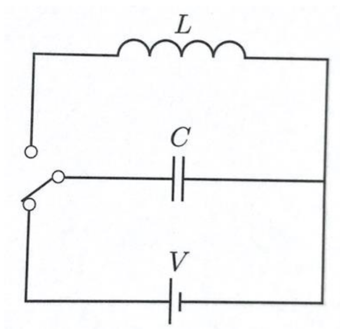
問3. ケプラーの第3法則を示せ.

問題２　　電磁気学

1. 極板間距離 d 、極板の面積 S の平行板コンデンサーに電荷 $\pm Q$ を与える。
   (1) コンデンサー内の電場の大きさを積分形のガウスの法則を用いて求めよ。
   (2) (1)をもとに、極板間の静電ポテンシャル差を求めよ。

2. 単位長さ当たりの巻き数が n 、半径 a の無限に長いソレノイドに電流 I が流れている。ソレノイド内外の磁場を積分形のアンペールの法則を用いて求めよ。

3. 右図のような自己インダクタンス L のコイル、電気容量 C のコンデンサー、電源 V からなる回路を考える。まずスイッチを下に倒してコンデンサーに電荷 $\pm Q_0$ を与えた。次に、スイッチを上に切り替えて、コイルとコンデンサーだけの回路にした。スイッチを切り替えた時刻を $t=0$ とし、その後の電流を $I(t)$、コンデンサーの電荷を $Q(t)$ で表す。



   (1) キルヒホッフの第二法則よりコンデンサーの電荷 $Q(t)$ の微分方程式をたて、それを解いて$Q(t)$ を求めよ。
   (2) コイルの誘導起電力 $\phi^{em}(t)$ を求めよ。

専門物理問題 第3問　　　量子力学 I

問１．　1次元区間 $0 \leq x \leq L$ に粒子が1個存在する場合を考える。粒子の位置エネルギーは $V(x)(\neq 0)$ という式で与えられてるとする。粒子の規格化された波動関数が $\varphi(x)$ で表されるものとする。

1-1) 粒子が微少区間 $x \sim x + dx$ に存在する確率を $\varphi(x)$ も用いて表せ。

1-2) $\varphi(x)$ に対する規格化条件を式で表せ。

1-3) 問 1-2) の式がなぜ成り立つのか、理由を説明せよ。

1-4) 位置エネルギーの期待値 $\langle V \rangle$ を求める式を示せ。

問２．規格化された波数 k の平面波の波動関数を $\varphi_k(x)$ とする。粒子のある状態が、規格化された波動関数 $\varphi(x)$ で表されているものとする。さらに、$\varphi(x)$ は以下のような重ね合わせで表されるものとする。

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

ここで $\{c_k\}$ は（複素）定数である。

2-1) この粒子の波数を観測したときに、波数がある値 k_0 をとる確率を示せ。

2-2) $\varphi(x)$ に対する規格化条件を式で表せ。また、その式が成り立つ理由を説明せよ。

2-3) $\{c_k\}$ を用いて運動量の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ を求めるための式を示せ。

問題 4　統計力学

N 個の磁性原子からなる磁性体を考える。各磁性原子は上向きスピン、下向きスピンの 2 状態をとるとし、その磁気モーメントを μ とする。磁性体には外部磁場 H がかかっていて、各原子はスピンが上向きの時は $-\mu H$、下向きの時は μH のエネルギーを持つ。

系は温度 T の熱浴に接しており、原子間の相互作用はないものとする。ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_B T$ とする。解答では、T と β は混在していてもよいものとする。

問 1. この系の分配関数 Z を計算せよ。

問 2. この系のヘルムホルツ自由エネルギー F を求めよ。

問 3. 系の内部エネルギー U が次の式から求められることを示せ。

$$U = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta F) \tag{1}$$

この関係式は、ギブス・ヘルムホルツの式と呼ばれる。

問 4. ギブス・ヘルムホルツの式を用いて、この系の内部エネルギー U を計算し、$U = -N\mu H \tanh(\beta \mu H)$ となることを示せ。

問 5. 絶対零度における磁性体の内部エネルギー $U(T \to 0)$ と、温度無限大における内部エネルギー $U(T \to \infty)$ を求め、それぞれの状態について物理的に説明せよ。ただし、$H > 0, \mu > 0$ とする。