2019年度実力テスト（専門物理問題）

2019年1月16日（木）

12：50～14：50　120分

解答上の注意

・　問題は全部で7題ある。
　最初の3題、電磁気学、量子力学Ⅰ、統計力学Ⅰは必ず解答すること。
　残り4題は選択問題である。うち2問を選択し解答すること。

・ すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・ 答案は解答用紙の授業科目の欄に受験科目の該当項目に〇をつけ、選択した問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

・ 解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

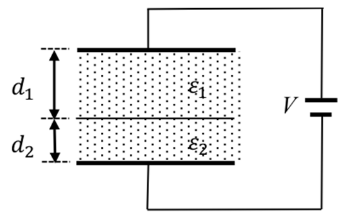
・ 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出のうえ、退室を認める。

専門物理問題　第１問　電磁気学

1. 半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ で電荷が分布している。
   (1) 導体内外の電場を求めよ。また、球の中心からの距離 r と電場の関係をグラフに示せ。
   (2) 球内外の静電ポテンシャルを求めよ。また、球の中心からの距離 r と静電ポテンシャルの関係をグラフに示せ。無限遠を基準点とする。

2. 半径 a の無限に長い円柱状の導体内を電流 I が一様に流れている。円柱内外の磁場の大きさを求めよ。また、円柱の中心軸からの距離 r と磁場の関係をグラフに示せ。

3. 右図のように平行板コンデンサーの極板間に、誘電率 ε_1 、厚さ d_1 の誘電体１と誘電率 ε_2 、厚さ d_2 の誘電体２を挿入し、起電力 V の電池をつないだ。それぞれの誘電体内部に生じる電場 E_1, E_2 と電束密度 D_1, D_2 の大きさを求めよ。



専門物理問題 第2問　　　量子力学 I

問1．　箱の中に赤または白の粒子が1個存在する。赤い粒子の波動関数を $\varphi_{\rm R}(x)$、白の粒子の波動関数を $\varphi_{\rm W}(x)$ とする。ただし、$\varphi_{\rm R}(x)$、$\varphi_{\rm W}(x)$ はそれぞれ規格化されている。（箱の中で粒子の色が変わることはない）

1-1) 箱の中の粒子の波動関数が $\varphi_0(x) = c_1\varphi_{\rm R}(x) + c_2\varphi_{\rm W}(x)$ であった。ここで c_1、c_2 は複素定数である。波動関数 $\varphi_0(x)$ が規格化されるための、c_1 および c_2 に対する条件式を示せ。

1-2) 箱の中の粒子の色を観測する（観測1）。どのような結果が得られるかを述べよ。

1-3) 観測1の直後に再度粒子の色を観測する（観測2）。どのような結果が得られるかを述べよ。

問2．半径 R の円があり、その円周上を動く質量 m の1次元自由粒子を考える。円周にそって位置座標 x を取ると、$x = 0$ と $x = 2\pi R$ は同じ点を表す。位置エネルギーを $V(x) = 0$ とする。以下の問に答えよ。

2-1) この系における定常状態に対するシュレディンガー方程式を示せ。

2-2) 波動関数 $\varphi(x)$ に課されている周期的境界条件を示せ。

2-3) 波動関数 $\varphi(x)$ を求めよ。

2-4) この系の角運動量 L_z は、円を含む平面に垂直な方向に $L_z = Rp$ という値を取る。p は x 軸方向の（すなわち、円周に沿った向きの）運動量である。問2-3) で求めた $\varphi(x)$ で表される状態について、L_z の値を求めよ。

2-5) 上記の計算結果をふまえ、角運動量の量子化について説明せよ。

専門物理 III　統計力学 I

同種粒子からなる量子理想気体を考える。一粒子の場合のエネルギー固有状態を $i = 1, 2, 3, \cdots$ とし，状態 i のエネルギー固有値を ϵ_i とする。この系の状態は占有数の組 $\{n_i\} = (n_1, n_2, n_3, \cdots)$ により一意に指定される。ここで，n_i は i 番目の状態をとる粒子数である。
ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_B T$ とする。解答では、T と β は混在していてもよいものとする。

問 1. この系の全粒子数 N と全エネルギー E を n_i, ϵ_i を用いて表せ。

系の大分配関数 Ξ は，化学ポテンシャルを μ として次のように書ける。

$$\Xi = \sum_{\{n_i\}} \prod_{i=1}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_i - \mu) n_i}$$

問 2. $\{n_i\}$ についての和を実行することにより，フェルミ粒子系の大分配関数を計算せよ。

問 3. $\{n_i\}$ についての和を実行することにより，ボーズ粒子系の大分配関数を計算せよ。

問 4. 系に含まれる平均の粒子数 $\langle N \rangle$ が

$$\langle N \rangle = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi$$

で与えられることを示せ。

以下，フェルミ粒子系を考える。

問 5. i 番目の準位の平均の占有粒子数 $\langle n_i \rangle$ を求めよ。これはフェルミ分布関数と呼ばれる。

問 6. (i)$T = 0$ と (ii) 有限温度のそれぞれの場合について，フェルミ分布関数の概形を描け。

量子力学 II

ハミルトニアン $\hat{H}$ が次の式で与えられる質量 m, 角振動数 ω の一次元調和振動子を考える。

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

ここで、$p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ は運動量の演算子である。

$\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ を次のように定義する。

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x + i\frac{1}{\sqrt{2m}}p\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x - i\frac{1}{\sqrt{2m}}p\right).$$

すると交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

が成り立ち、ハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \hbar\omega\left\{\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right\}$$

と表される。

1. $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態の波動関数 $\phi_n(x)$ は、$\hat{a}^\dagger\hat{a}\phi_n(x) = n\phi_n(x)$ を満たす。このとき、

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\phi_n(x) = (n-1)\hat{a}\phi_n(x)$$
$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\phi_n(x) = (n+1)\hat{a}^\dagger\phi_n(x)$$

   となることを示せ。

2. この系の基底状態の波動関数 $\phi_0(x)$ は

$$\hat{a}\phi_0(x) = 0$$
$$\phi_0^*(x)\hat{a}^\dagger = \{\hat{a}\phi_0(x)\}^\dagger = 0$$

   を満たす。

   基底状態での位置 x の 2 乗の期待値と運動量 p の 2 乗の期待値を計算し、ポテンシャルエネルギーの期待値と運動エネルギーの期待値を比較せよ。$\phi_0(x)$ は規格化されていると考えてよい。また、x と p は $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ によって以下のように表される。

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$
$$p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

専門物理問題　第 5 問　固体物理

以下の文章の空欄にあてはまる最も適切な語句、数値または数式を解答群から選んで記号で答えると共に、以下の問(a)から問(c)にすべて答えよ。

固体結晶では原子や分子が周期的に配列する。この周期的配列を表す $\boxed{\quad(1)\quad}$ 格子において、基本ベクトルの $\boxed{\quad(2)\quad}$ 倍だけ格子をずらす操作を行っても結晶全体の性質は変わらないという対称性を $\boxed{\quad(3)\quad}$ 対称性と呼ぶ。また、$\boxed{\quad(1)\quad}$ 格子上の任意の格子点を $\boldsymbol{R} = n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2 + n_3\boldsymbol{a}_3$ ($\boldsymbol{a}_i$ は基本格子ベクトル、n_i は整数)と表すとき、$\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{R}) = 1$ を満たす $\boldsymbol{K}$ を $\boxed{\quad(4)\quad}$ ベクトルと呼ぶ。格子定数が a の単純立方格子の $\boxed{\quad(4)\quad}$ は、格子定数が $\boxed{\quad(5)\quad}$ の単純立方格子となる。一方、有限温度では固体結晶中の原子や分子の熱運動により、$\boxed{\quad(6)\quad}$ 振動と呼ばれる振動が結晶中を伝播する。同種原子からなる 1 次元単純立方格子において、格子定数を a、原子の質量を M、調和振動子モデルのばね定数を K、$\boxed{\quad(6)\quad}$ 振動の波数の大きさを k とするとき、その $\boxed{\quad(7)\quad}$ 関係は、$\underline{\omega(k) = \boxed{\quad(8)\quad}\text{となる}}$(i)。これより、十分に低い温度領域で格子比熱に寄与する $\boxed{\quad(6)\quad}$ 振動は、$k = \boxed{\quad(9)\quad}$ 近傍であり、$\boxed{\quad(6)\quad}$ 振動の速さを c とすると、近似的に $\underline{\omega(k) = \boxed{\quad(10)\quad}\text{と表される}}$(ii)ことが分かる。

解答群：(ア) アインシュタイン　(イ) デバイ　(ウ) ブラッグ　(エ) ブラベ
(オ) フェルミ　(カ) 電子　(キ) 格子　(ク) 光子　(ケ) a　(コ) $1/a$
(サ) $2\pi a$　(シ) π/a　(ス) $2\pi/a$　(セ) $4\pi/a$　(ソ) 0　(タ) 有理数
(チ) 整数　(ツ) 実数　(テ) 並進　(ト) 回転　(ナ) 不確定性　(ニ) 分散
(ヌ) $\sqrt{K/M}\sin ka$　(ネ) $\sqrt{K/M}\cos ka$　(ノ) $2\sqrt{K/M}\,|\sin(ka/2)|$
(ハ) $2\sqrt{K/M}\,|\cos(ka/2)|$　(ヒ) 逆格子　(フ) 法線　(ヘ) 射影
(ホ) 反転　(マ) c　(ミ) ck　(ム) ck^2　(メ) c/k　(モ) $\exp(-ck)$

問(a)　格子定数が a の 2 次元単純立方格子における第一ブリルアンゾーンを図示せよ。

問(b)　下線部(i)で表される $\boxed{\quad(7)\quad}$ 関係を第一ブリルアンゾーンの範囲内で図示せよ。

問(c)　量子統計を用いる理論では格子比熱が以下の式で与えられること、および固体中では以下の近似が適用できることを用いて、下線部(ii)の場合に、$c_{\text{格子}} \propto T^3$ となることを示せ。

$$c_{\text{格子}} \propto \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{V}\sum_k \frac{\hbar\omega(k)}{\exp(\hbar\omega(k)/k_B T) - 1}\right]$$

$$\frac{1}{V}\sum_k F(k) \to \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty F(k)4\pi k^2 dk$$

専門物理問題　第６問　相対論＋原子核物理/場と粒子

５つの物理定数

- 真空中の光速 c
- プランク定数 h
- 万有引力定数 G
- 電子の静止質量 m_e
- 電荷素量 e

について以下の問に答えよ。

1. 上記の物理定数の値を記せ。
2. 上記の物理定数の中から任意の２つを選び、それらの実験的な測定方法を述べよ。
3. $h^{1/2}G^{1/2}c^{-5/2}$ はどのような次元をもつ量か。
4. 上記５つの物理定数に加えて、真空の誘電率 ε_0 を加えた６つの物理定数の中から必要なものを選んで組み合わせ、無次元量を１つ作れ。同様に、長さの次元をもつ量を３つ示せ。６つ全てを用いる必要はない。さらに、これらの物理的意味など、知っていることを自由に記述せよ。

専門物理問題　第 7 問　電気・電子回路

図 1 は**理想的なオペアンプ**を用いた回路である。オペアンプの－及び＋は反転入力及び非反転入力を表し、ここでは反転入力の入力電圧を v_- とする。図中の R_1 ～ R_5 は抵抗 1～5 の抵抗値を表す。また、i_1, i_2, i_4, i_5 は抵抗 1, 2, 4, 5 を流れる電流値を表し、矢印の方向に流れる場合を正とする。更に、v_2 及び v_5 はそれぞれ抵抗 2 及び抵抗 5 の直後の電圧である。端子 A と B からなる端子対は入力側であり、一方、出力側である端子対 C D 間には（図には明示していないが適切な抵抗値を持つ）負荷抵抗が接続されているとする。

さて、図の様に入力側に電圧 v_s (>0) を印加したところ、出力側の負荷抵抗には電流が流れた。**数値、或いは図と問題文中で用いられている変数のみを用いて、以下の設問の<u>最も適切な解</u>を解答用紙に記述せよ。**

(1) 電流値 i_1 を、必ず v_s を用いて式で表せ（8 点）。
(2) 電流値 i_2 を、適切な式で表せ（8 点）。
(3) 抵抗値の比 R_2/R_1 を、必ず v_s を用いて式で表せ（8 点）。
(4) 電流値 i_5 を、適切な式で表せ（8 点）。
(5) 抵抗値の比 R_4/R_3 を、必ず v_5 を用いて式で表せ（8 点）。

以下の問では、$R_2/R_1 = R_4/R_3 = K$（K は適当な定数）が成り立つとして解答せよ。

(6) 電流値 i_4 を、必ず v_- を用いて適切な式で表せ（12 点）。
(7) 電圧値 v_5 を、必ず K を用いて式で表せ（12 点）。
(8) 電流値 i_5 を、必ず K と v_s を用いて式で表せ（12 点）。
(9) 電流値 i_4 を、必ず R_1 ～ R_5 の中の幾つかと v_s を用いて式で表せ（12 点）。
(10) 端子 CD 間に接続した負荷抵抗に流れる電流の電流値を、必ず R_1 ～ R_5 の中の幾つかと v_s を用いて式で表せ。ただし電流値は C から D の方向に流れる場合を正とする（12 点）。

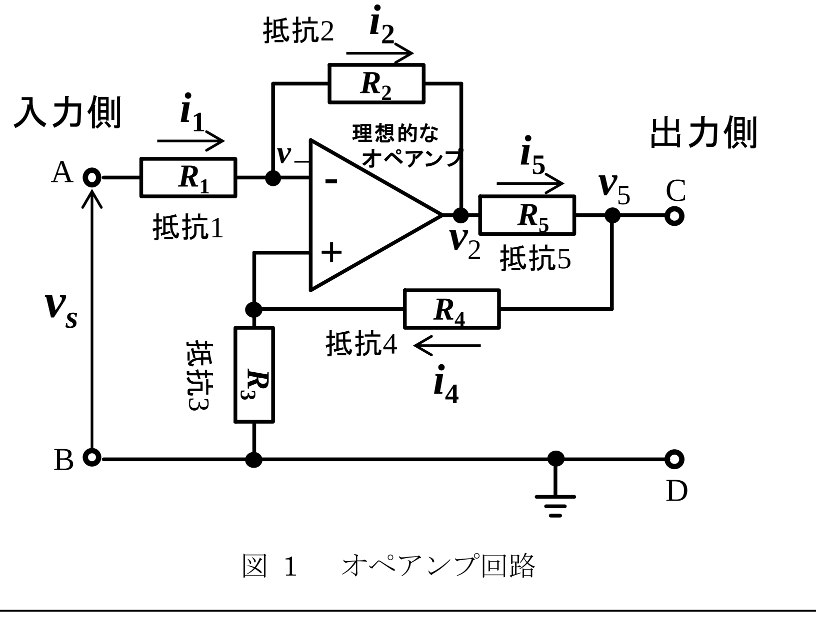


図 1　オペアンプ回路