

# 2019年度 実力テスト

## 基礎問題（コース共通）

2020年1月16日（木）  
11:00～12:00（60分）

### 解答上の注意

- 問題は全部で3題ある。全ての問題に解答すること。
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し、解答した問題番号を所定の欄に明記すること。問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない。
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し、解答用紙は3枚とも提出すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。ただしその旨を表面に明記すること。
- 途中退出は不可とする。

**1**

- (1) (a) 0 を中心とする  $\sin x$  と  $\log(1+x)$  のテイラー展開 (マクローリン展開) を書け. 一般項も書くこと.
- (b) 0 を中心とする  $(\sin x) \log(1-2x^2)$  のテイラー展開 (マクローリン展開) を,  $x^7$  の項まで求めよ.
- (2) 次の積分を計算せよ. ただし, (b) は積分範囲を図示して解答すること.

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 7} \qquad (b) \iint_{x^2+y^2 \leq 1, y \geq |x|} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

**2** 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 6 & -7 & -12 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

について, 以下の間に答えよ. ただし  $E_3$  は3次の単位行列を表す.

- (1)  $A$  の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化可能かどうか判定せよ.
- (2)  $A^2 + E_3$  が正則行列かどうか理由をつけて答えよ.
- (3)  $B = A^6 - 9E_3$  とおくとき, 行列式  $\det B$  を求めよ.

(I) 宇宙空間を考える。慣性系  $S$  に固定された座標系の原点を  $O$  とする。2つの天体 1 と 2 があり、 $O$  を始点としたそれぞれの、時刻  $t$  における位置ベクトルを  $\vec{r}_1(t)$ ,  $\vec{r}_2(t)$  とする。天体 1 と天体 2 以外の天体は十分遠方にあり、その影響は無視できるとする。

重力定数 (万有引力定数) を  $G$  とおく。以下の設問に答えよ。

- (1) 天体 1 と天体 2 の質量中心 (重心)  $G$  の位置ベクトル  $\vec{R}(t)$  をもとめよ。
- (2) 慣性系  $S$  において、 $G$  はどのような運動をするか、論理的に (式を用いて) 説明せよ。
- (3) 時刻  $t$  における、天体 1 と天体 2 の速度を  $\vec{v}_1(t)$ ,  $\vec{v}_2(t)$  とする。 $t \rightarrow \infty$  の極限で、天体 1 と天体 2 の間の距離が有限であるための条件をもとめよ。
- (4) 上記 (3) の条件をみたすとき、 $G$  を原点とする座標系において、天体 1, 天体 2 はどのような運動をするか。それぞれの天体の軌道についても言及せよ。
- (5)  $\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$  とする。 $\vec{r}(t)$  の満たすべき微分方程式を、天体 1 と天体 2 の運動方程式から導け。

(II) 図のように、一様密度で半径  $R$ , 質量  $M$  の金属球を、長さ  $l$ , 質量  $m$ , 一様密度の細い金属棒で天井からつるす。このとき、金属棒の延長線が球の中心をつらぬくように、金属棒は球に固定されており、金属棒と金属球からなる振り子は、剛体とみなすことができる。金属棒と天井の接点  $O$  には、紙面に垂直な軸のまわりを滑らかに回転できるように継ぎ手が装着されており、振り子は  $O$  を通る紙面に垂直な軸のまわりを回転できる。したがって、球の中心は常に紙面内にある。

地上での重力加速度の大きさを  $g$  とし、以下の設問に答えよ。

- (1) 球の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを計算せよ。計算の仕方がわかるように簡便に答えよ。このとき、必要ならば球の密度を  $\rho_S$  とおいて計算し、答には  $M$  を用いること。
- (2)  $O$  を通る紙面に垂直な軸のまわりの球の慣性モーメントはいくらか。
- (3)  $O$  を通る紙面に垂直な軸のまわりの金属棒の慣性モーメントを計算せよ。計算の仕方がわかるように簡便に答えること。必要ならば、棒の密度を  $\rho_B$  とおいて計算し、答には  $m$  を用いること。
- (4)  $O$  を通る紙面に垂直な軸のまわりの振り子全体の慣性モーメント  $I$  はいくらか。
- (5) 振り子を鉛直線から微小角  $\theta$  だけ持ち上げ、そっと放した。振り子が鉛直線を横切るときの球の中心点の速さを  $I$  を用いて表わせ。ただし、 $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  と近似してよい。

