6

質量 M，電荷 Q の粒子 O と，質量 m，電荷 $-Q$ の粒子 P が外場の影響がない真空中にある。粒子はともに質点と考えてよく，粒子間にはクーロン力のみが働き重力は無視できる。以下では真空の誘電率を ε_0 とし，荷電粒子 O，P からの電磁波放射は無視できるものとする。なお，時間 t の関数 $f(t)$ の時間微分を $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}(t)$，$\ddot{f}(t) = \frac{d^2f}{dt^2}(t)$，$\ldots$ などと略記する。

問 1. 適当な原点をとり，この原点から測った，時刻 t における粒子 O, P の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_1(t), \boldsymbol{R}_2(t)$ とすると，この系の質量中心（重心）の位置ベクトル $\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}}(t)$ はどのように表わせるか。

問 2. この系において質量中心が等速度運動をすることを示せ。

$M \gg m$ であった。このとき，適当な慣性座標系をとると粒子 O は動かないと近似でき，この座標系では粒子 P は O を含む平面内を運動する。そこで，粒子 O の位置を原点とし，O から測った P の位置を，平面極座標を用いて，動径成分 $r(t)$ と平面内の適当な方向から測った方位角成分 $\varphi(t)$ で表す。以下の議論ではこの座標系を用いる。

問 3. 時刻 t における粒子 P の運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U を，$r(t)$，$\varphi(t)$，およびその時間微分で表わせ。ただし，U は無限遠においてゼロであるとする。

問 4. 粒子 P の運動が有界である（すなわち無限遠に達することはない）ための条件を答えよ。

問 5. この系のラグランジアン $\mathcal{L}$ を，$r(t)$，$\varphi(t)$ および，その時間微分を用いて表わせ。

問 6. 上記の結果を用いて，一般化座標を $r(t)$，$\varphi(t)$ として，ラグランジュ方程式を求めよ。

問 7. 粒子 P の O に対する角運動量 L が保存量であることを示せ。

(問 6) より，有界である条件をみたすとき，粒子 P はケプラー運動をすることがわかる。また，上記の考察より，この運動には 2 つの保存量 $E = K + U$ と L が存在し，簡単な計算から，P の軌道は離心率 $e = \sqrt{1 + (32\pi^2{\varepsilon_0}^2EL^2)/(mQ^4)}$，2 つの焦点間の距離が $2ae$（長半径 $a = Q^2/(8\pi\varepsilon_0|E|)$）の楕円であることがわかる。以下で P の運動の周期を T とする。

問 8. $t = 0$ のとき，$r(0) = d$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{r}(0) = 0$, および $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ であった。$t = T/2$ における，予想される，粒子 P の O からの距離 d'，方位角 φ' と速さ v' を e，d，φ_0，ω_0 等を用いて表わせ。なお，答えは一組とは限らない。

7

真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率 μ_0 として以下の問いに答えよ。

問 1. 極板間距離 d、極板の面積 S の平行板コンデンサーを考える。

(1) 両極板に $\pm Q$ の電荷を与えたときに、コンデンサー内部に生じる電場の大きさを求めよ。

(2) コンデンサーの電気容量を求めよ。

問 2. 単位長さ当たりの巻き数 n、長さ l、断面積 S のソレノイドコイルを考える。

(1) ソレノイドコイルに電流 I を流したときに、コイル内部に生じる磁束密度の大きさを求めよ。

(2) ソレノイドコイルの自己インダクタンスを求めよ。

問 3. 自己インダクタンス L のコイルと電気容量 C のコンデンサーを直列につないだ回路を考える。時刻 $t = 0$ でコンデンサーの両極板に電荷 $\pm Q$ を与えた。

(1) 時刻 $t = 0$ 以降、回路に電流が流れ始めた。電流 $I(t)$ とコンデンサーの電荷 $Q(t)$ との間の関係式を示せ。

(2) コイルに発生する誘導起電力を L と $I(t)$ を用いて表せ。

(3) コンデンサーの電荷 $Q(t)$ の時間変化を求めよ。

(4) 電流 $I(t)$ の時間変化を求め、グラフに示せ。

8

問 1　1 次元井戸型ポテンシャル中を運動する粒子の運動を考える。無限に高いエネルギー障壁により、粒子は区間 $0 \leq x \leq L$ に閉じ込められているものとする。井戸の内部の位置エネルギーを $V = 0$ とする。

1-1) シュレディンガー方程式、および波動関数 $\varphi(x)$ の満たすべき境界条件を示せ。

1-2) この系の波動関数を、エネルギーの低い順に $\varphi_n(x)$ とする。ただし、$n = 1, 2, 3, \ldots$ である。規格化された波動関数 $\varphi_n(x)$ を求めよ。

1-3) n 番目の波動関数 $\varphi_n(x)$ で表される状態について、運動量と運動エネルギーを測定した。それぞれの物理量について、どのような値が観測されるか、またその期待値がどのような値をとるかを示せ。

問 2　質量 m の粒子がばね定数 $k = m\omega^2$ のばねでつながれた調和振動子を考える。単位系を選ぶことによって、これ以降 $\hbar = m = \omega = 1$ とする。このとき、ハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2)$$

と表される。ここで $\hat{X}$ は位置、$\hat{P}$ は運動量を表す演算子である。

2-1) $\hbar = 1$ に注意すると、$\hat{X} = X$ としたときに $\hat{P} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial X}$ である。これを用いて交換積 $[\hat{X}, \hat{P}] = \mathrm{i}$ を示せ。

2-2) 上記の交換関係を用いて、演算子 $\hat{A} = (\hat{X} + \mathrm{i}\hat{P})/\sqrt{2}$ およびそのエルミート共役 $\hat{A}^\dagger = (\hat{X} - \mathrm{i}\hat{P})/\sqrt{2}$ について、交換積 $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger]$ を求めよ。

2-3) 演算子 $\hat{X}$、$\hat{P}$ を $\hat{A}$ と $\hat{A}^\dagger$ を用いて表せ。さらに、演算子の積 $\hat{N} = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ を用いてハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ を表せ。

2-4) 基底状態の波動関数を φ_0 とする。φ_0 は $\hat{N}$ の固有関数でもあり、$\hat{N}\varphi_0 = 0$ である。ここで $\varphi_1 = \hat{A}^\dagger\varphi_0$ とする。交換関係等を用いて φ_1 が $\hat{N}$ の固有関数になること、およびその固有値を示せ。

2-5) 上記の φ_0 は、$\hat{A}\varphi_0 = 0$ を満たすことが知られている。$\hat{A} \propto \hat{X} + \mathrm{i}\hat{P} = X + \dfrac{\partial}{\partial X}$ より、微分方程式

$$\left(X + \frac{\partial}{\partial X}\right)\varphi_0(X) = 0$$

を解いて $\varphi_0(X)$ を求めよ。($\varphi_0(X)$ を規格化しなくてもよい)

9

体積が $V = L^3$ の立方体容器の中に、相互作用しない質量 m の気体分子が N 個含まれている。この系の統計的性質をミクロカノニカル集団の手法を用いて考察しよう。以下の計算では、半径 R の d 次元球の体積 $V_d(R)$ が必要となるが、これについては d に依存する定数 C_d を用いた表式 $V_d(R) = C_d R^d$ を用いよ。

問 1. ある一つの気体分子の運動量を $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ とする。周期境界条件の下で許される運動量の値を、各成分が整数のベクトル $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ を用いて表せ。

問 2. N 個の粒子は互いに区別できないことに留意し、全エネルギーが E 以下の状態数 $\Omega(E)$ を求めよ。

問 3. 全エネルギーが E と $E + \Delta E$ の間にある状態数 $W(E)$ を求めよ。ただし、$E \gg \Delta E$ として、ΔE について一次までの近似をせよ。

問 4. 系の温度を求め、エネルギー等分配則 $E = \frac{3}{2} N k_B T$ が成り立つことを示せ。

問 5. 系の圧力を求めよ。

10

問 1. ３種類のブラベー格子とその逆格子の名前を記し、それらの形を図示せよ。

問 2. 一個の水素原子中の電子のシュレジンガー方程式は次のように表される。

$$\left\{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r})\right\}\phi(\vec{r}) = \epsilon_0\phi(\vec{r}) \tag{1}$$

と表される。ここで m は電子の質量、$\vec{p}$ は一個の電子の運動量演算子、$V(\vec{r})$ は一個の水素イオンが電子に及ぼすポテンシャル、$\phi(\vec{r})$ は電子の固有関数、ϵ_0 は固有エネルギーである。以降、$1s$ 軌道だけを考え、$\phi(\vec{r})$, ϵ_0 はその軌道の固有関数、固有エネルギーとする。

次に二個の固定された水素イオンと一個の電子の系を考える。$V_i(\vec{r})$ を i 番目の水素イオンが電子に及ぼすポテンシャルとし、i 番目の水素原子だけがあるときの電子の $1s$ 軌道の固有関数を $\phi_i(\vec{r})$ とする。

(1) 二個の固定された水素イオンと一個の電子の系の、一個の電子に対するシュレジンガー方程式を記せ。

(2) 1 のシュレジンガー方程式の固有関数 $\psi(\vec{r})$ を、$\psi(\vec{r}) = c_1\phi_1(\vec{r}) + c_2\phi_2(\vec{r})$ とおく。このとき、適当な近似を用いて、1 電子の状態のエネルギーを求め、それが $\epsilon_0 - t$, $\epsilon_0 + t$ となることを示せ。ここで $t = -\int d^3r\phi_1^*(\vec{r})V_1(\vec{r})\phi_2(\vec{r})$ である。

(3) 水素分子の基底状態の電子の詰まり方を示せ。

問 3. 問 2 の結果を用いて、金属と絶縁体のバンド構造の違いを示し、それから金属と絶縁体の物性の違いを説明せよ。

11

光 (X 線やガンマ線) と物質との相互作用について、以下の問に答えよ。

問 1. 光と物質との相互作用にはいくつかの種類がある。それらの中から 2 つを選び、それらの物理過程の名称を答えよ。また、それぞれの物理過程について説明せよ。

問 2. 光が自由電子に散乱される物理過程において、入射光のエネルギーを $h\nu$、静止した電子により散乱された後の散乱光のエネルギーを $h\nu'$ とし、光の散乱角を θ とすると、以下の関係が成り立つ。

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1+\gamma(1-\cos\theta)}$$

ただし、$\gamma = \dfrac{h\nu}{m_e c^2}$ である。ここで、m_e は電子の質量、c は真空中の光速である. この物理過程において、散乱後に電子が受け取るエネルギーを求めよ。また、電子が散乱後に最大のエネルギーを得る時の電子のエネルギーを求めよ。さらに、^{137}Cs の 662 keV のガンマ線が物質に入射した時に、この物理過程において、電子が受け取るエネルギーの最大値を計算せよ。

問 3. 放射線検出器で、放射性物質からのガンマ線を 60 秒間測定した所、平均で 3600 個検出した。測定したガンマ線の個数分布がポアソン分布に従うとすると、1 秒間あたりのガンマ線の計数率とその誤差はいくらになるか。また、放射線検出器のそばに、放射性物質を置かない状態でバックグランドを測定したところ、そのバックグランドの 1 秒間あたりの計数率は 15 ± 5 個/秒であった。バックグランドを引いた 1 秒間あたりのガンマ線の計数率を誤差も含めて求めよ。

12

物理学や数学の分野において各自が興味を持っている研究テーマについて、なぜ興味があり、何をどこまで明らかにすることが考えられ、その結果が分野、ひいては社会にもたらすであろう成果について、簡単かつ具体的に論じよ。