1

以下の問に答えよ．

(1) G を群とし，H_1, H_2 をその部分群とする．このとき，交わり $H_1 \cap H_2$ は G の部分群であることを示せ．

(2) 群準同型写像の定義を述べよ．

(3) 複素 n 次正則行列にその行列式の値を対応させる写像を f とする．このとき，f は群準同型写像であることを示せ．また，$\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ を求めよ．

2

曲面

$$
\begin{aligned}
x &= (2+\cos v)\cos u \\
y &= (2+\cos v)\sin u \qquad (0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi) \\
z &= 2\sin v
\end{aligned}
$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 全曲率を求めよ．

(2) 平均曲率を求め，平均曲率が 0 になるような点があるかを調べよ．

3

以下の問に答えよ．

(1) x, y を実変数とし，$z = x + yi$ とする．$u(x,y) = 2x^2 - 5xy - 2y^2$ のとき，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が正則関数になるような実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(2) 以下の複素線積分の値を求めよ．ただし，単純閉曲線の向きは正の向きとする．

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \overline{z}\, dz$　(b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-3)^3(z+1)} dz$　(c) $\displaystyle\int_{|z-4|=2} \frac{z^2}{(z-3)^3(z+1)} dz$

4　以下の問に答えよ．

(1) C, λ を定数，n を 0 以上の整数とする．このとき，2 変数関数

$$u_0(t,x) = Ce^{\lambda t}\cos(n\pi x) \quad (t>0,\ 0 \leqq x \leqq 1)$$

が熱方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすように λ を n で表せ．

(2) $f_1(x), f_2(x)$ を $[0,1]$ 上の関数とする．関数 $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ が

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_j}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(t,x), \quad (t>0, 0 \leqq x \leqq 1),\\
&u_j(0,x) = f_j(x), \quad (0 \leqq x \leqq 1)\\
&\frac{\partial u_j}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u_j}{\partial x}(t,1) = 0, \quad (t>0), \quad j=1,2
\end{aligned}$$

を満たすならば，$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$ は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad (t>0, 0 \leqq x \leqq 1),\\
&u(0,x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (0 \leqq x \leqq 1)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0, \quad (t>0), \quad j=1,2
\end{aligned}$$

を満たすことを示せ．

(3) 次の熱方程式の境界値問題の解を求めよ．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \quad (t>0, 0 \leqq x \leqq 1),\\
&v(0,x) = \sin^2(\pi x), \quad (0 \leqq x \leqq 1)\\
&\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,1) = 0, \quad (t>0).
\end{aligned}$$

5　以下の問に答えよ．

(1) $f : X \to Y$ を写像，B_1, B_2 を Y の部分集合とするとき，次を示せ．

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の 2 項関係

$$R(x,y)：\ \text{ある実数}\ c>0\ \text{が存在して}\ x = cy$$

は同値関係かどうか調べよ．

(3) 関数 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

で定義するとき，$(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間になることを示せ．