相対性理論とMaxwellの方程式

0.1 Introduction

Maxwell の方程式は相対性理論の誕生、特に特殊相対性理論の誕生に重要な役割を果たしました。[1] Maxwell によってこの方程式が作られ、その後、Herz によって電磁波の存在が証明されてから、電磁波を媒介する物質として仮定された “エーテル” の存在がクローズアップされて来ました。しかし、その後の研究によって、この “エーテル” の奇妙な性質が分かって来ました。

“何処にでも存在する”
“全ての物体をすり抜ける”

等など…
また、この “エーテル” の静止した “絶対的な静止系” の存在 (に対する地球の運動) を確かめるために行われた Michelson - Morley の実験 (←1887 年)[2] はそのような系は存在しないことを示しました。

0.2 Lorentz 変換

これを解決するために、エーテルは “地表との摩擦によって地球の自転に巻き込まれて地表と一緒に運動している” 等の「天動説を正当化」しようとするようにエーテルの存在を正当化する試みも行われました。これに対して Lorentz はお互いに動いている系は、動いている方向に、長さが縮むという仮定をいれた変換

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

を導入しました。さらに Lorentz は、この変換は Maxwell の方程式を保存することを示し、この変換を仮定すれば、エーテルの矛盾もなくなることを示しました。この逆変換は

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

となります。なお式 $x = \gamma(x' + vt')$ は、系 (x, y, z, t) を系 (x', y', z', t') から見たとき、速度 $-v$ で x 軸の方向に動いているはずだという「運動の相対性」から出てきます。

ここで $\gamma = 1$ したがって $t = t'$ とおくとガリレイ (ガリレオ) (Galileo Galilei) 変換になります。$\gamma = 1$ で無い場合には時間は $x' = \gamma(x - vt)$ $x = \gamma(x' + vt')$ の 2 式から、t'(および t) は場所と相対速度に依存して

$$t' = \frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma v}x + \gamma t$$

[1] 本章について、アドバイスを頂きました本学の山崎 了先生に感謝いたします。
[2] 1980 年頃、会議でクリーブランドのケース・ウエスタン・リサーヴ大学 (Case Western Reserve University) に行きました。そのときに Michelson か Morely が測定した干渉のチャートを見ました。遠い目…

$$t = \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma v}x' + \gamma t'$$

となります。ここで c を真空中の光速としたとき $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ です。これを使うと

$$t' = \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma v}x + \gamma t = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

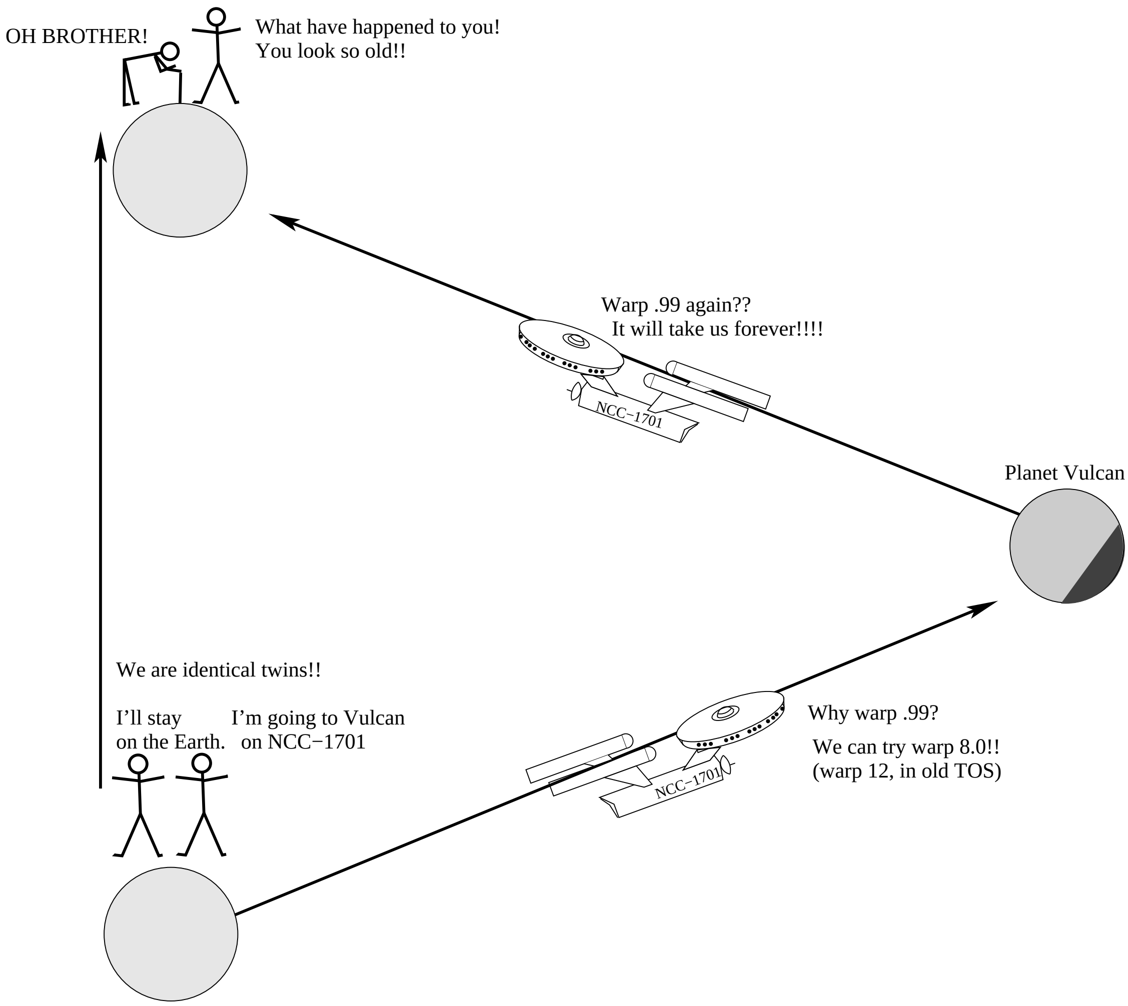
$$t = \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma v}x' + \gamma t' = \gamma\left(t' - \frac{vx'}{c^2}\right)$$

となります。

　この変換は、

時間の進み方が、それぞれの系で異なることになっています。しかも $\gamma \geq 1$(等号は $v = 0$ のときだけ成立) ですから、お互いに動いている慣性系からみると、他の系の時間の進みは遅くなっていることに対応しています。

これが双子のパラドックス等に続くわけですが、本章ではそこまでは話は進めません。悪しからず。



双子のパラドックス

問題 7-1
この変換を行列を使って以下のようにかけることを示せ。ただし $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ である。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

問題 7-2
上で求めた変換の逆変換が行列

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

で書けることを示し、その物理的な理由を述べよ。

問題 7-3
系 S_1 が系 S_0 に対して x 軸の正の方向に速さ v_1 で移動しており、系 S_2 が系 S_1 に対して、x 軸の正の方向に速さ v_2 で移動している。このとき系 S_2 は系 S_0 に対して x 軸の正の方向にどのような速さで移動していることになるか。このときの系 S_2 の系 S_0 に対する変換を行列の形で書きなさい。またその変換 (行列) が **Lorentz** 変換であることを示しなさい。

これらの問題 7-1〜7-3 の結果は Lorentz 変換が「群」を作る (Lorentz 変換を 2 回行った結果、すなわち変換の「積」が Lorentz 変換であり、しかも Lorentz 変換の逆変換が存在する) ことを示していることで、大変重要です。また問題 7-3 の結果は Lorentz 変換が可換群を作るように見えますが、それは同じ x 方向の Lorentz 変換であったためで、任意方向への Lorentz 変換は可換ではありません (残念!!)。Lorentz 変換の作る群は可換群ではありません。

0.3 Lorentz 変換と Maxwell の方程式

いま x, y, z, t で記述されている系において Maxwell の方程式

$$\nabla \cdot \vec{E}(x, y, z, t) = \frac{\rho(x, y, z, t)}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(x, y, z, t) = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(x, y, z, t) = \mu_0(\vec{i}(x, y, z, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

ここでは、めんどくさいので $\rho(x, y, z, t) = 0, \vec{i}(x, y, z, t) = 0$(真空ですな) と仮定して話をまず進めていきましょう。

(電荷も電流もない真空中の $Maxwell$ の方程式)

$$\nabla \cdot \vec{E}(x, y, z, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(x, y, z, t) = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(x, y, z, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

この方程式の変数を (x, y, z, t) から (x', y', z', t') に変えてみましょう。そうすることによって系 (x, y, z, t) に対して速さ v で運動している系 (x', y', z', t') からみた電磁場の運動を記述することが出来るはづだからです。これ等の Maxwell の方程式は $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ や $\frac{\partial}{\partial t}$ 等の偏微分から作られており、また Lorentz 変換により (x, y, z, t) は (x', y', z', t') で表されていますから $\vec{E}(x, y, z, t)$ は合成関数として (x', y', z', t') の関数になっています。したがって

$$\frac{\partial E_x(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial E_x(x(x', y', z', t'), y(x', y', z', t'), z(x', y', z', t'), t(x', y', z', t'))}{\partial x} = \frac{\partial E_x(x', y', z', t')}{\partial x}$$

と考えて、合成関数の微分より

$$\frac{\partial E_x(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

のように書くことが出来ます。ここで Lorentz 変換から x についての偏微分は

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma v} = -\frac{\gamma v}{c^2}$$

ですから、この作業によって $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ は $(x', y', z'.t')$ の関数として記述されたことになります。

y についての偏微分は

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial z'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial y} = 0$$

z についての偏微分は

$$\frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$$

t についての偏微分は

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v, \quad \frac{\partial y'}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma$$

が成立します。これを使って

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

における

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

は合成関数の微分 (相対性理論でも合成関数の微分は出てきます!!!!合成関数の微分が出来れば相対性理論も…) から

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

と書けることになります。ここに前の関係を使うと $\frac{\partial x'}{\partial x}=\gamma, \frac{\partial y'}{\partial x}=0, \frac{\partial z'}{\partial x}=0, \frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{(1-\gamma^2)}{\gamma v}=-\frac{\gamma v}{c^2}$ より

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\gamma\frac{\partial E_x}{\partial x'}+\frac{(1-\gamma^2)}{\gamma v}\frac{\partial E_x}{\partial t'}=\gamma\frac{\partial E_x}{\partial x'}-\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}=\gamma\left(\frac{\partial E_x}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}\right)$$

同様にして合成関数の微分のルールにしたがって

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

ここで y についての偏微分のルール

$$\frac{\partial x'}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial y'}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial z'}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial t'}{\partial y}=0$$

を使って

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial y'}$$

まったく同様にして

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial z'}$$

まとめて

$$\nabla\cdot\vec{E}=\gamma\left(\frac{\partial E_x}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}\right)+\frac{\partial E_y}{\partial y'}+\frac{\partial E_y}{\partial z'}=0$$

まったく同様にして

$$\nabla\cdot\vec{B}=\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right)+\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_y}{\partial z'}=0$$

を得ることが出来ます。注意しておきますが、この式は系 (x,y,z,t) における真空中 (電荷が無い) のガウスの法則を (x',y',z',t') を使って書いたもので、系 (x',y',z',t') でのガウスの法則ではないことに留意してください。
次に Maxwell の方程式の本体である電磁誘導の法則 (Faraday's law of induction) とマックスウエル・アンペール (Maxwell-Ampere) の法則について同様な計算をしていきましょう。
まず電磁誘導の法則

$$\nabla\times\vec{E}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{x}-\frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{y}-\frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{z}$$

の各成分について考えていくことにしましょう。

0.3.1 電磁誘導の法則の x 成分

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

において、各項を計算していきます。y および z による偏微分は, 合成関数の偏微分の式にしたがって計算していきます。

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=\frac{\partial E_z}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y}$$

y についての偏微分

$$\frac{\partial x'}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial y'}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial z'}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial t'}{\partial y}=0$$

を使って

$$\begin{aligned}&=\frac{\partial E_z}{\partial x'}\times 0+\frac{\partial E_z}{\partial y'}\times 1+\frac{\partial E_z}{\partial z'}\times 0+\frac{\partial E_z}{\partial t'}\times 0\\&=\frac{\partial E_z}{\partial y'}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=\frac{\partial E_z}{\partial y'}$$

まったく同様にして

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{\partial E_y}{\partial z'}$$

右辺の t による偏微分は少しメンドクサイデスが、例の合成関数の微分にしたがって

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{\partial B_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial B_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial B_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

ここで t についての偏微分は $\frac{\partial x'}{\partial t}=-\gamma v,\quad \frac{\partial y'}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial z'}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial t'}{\partial t}=\gamma$ ですから、

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=-\gamma v\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\gamma\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

以上まとめて

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=\gamma v\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\gamma\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

を得ることが出来ます。ここで前に求めた関係

$$\nabla\cdot\vec{B}=\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right)+\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_z}{\partial z'}=0$$

を使って、電磁誘導の法則に異質な $\frac{\partial B_x}{\partial x'}$ を

$$\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right)=-\frac{\partial B_y}{\partial y'}-\frac{\partial B_z}{\partial z'}$$

より

$$\gamma v\frac{\partial B_x}{\partial x'}=\frac{\gamma v^2}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}-v\left(\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_z}{\partial z'}\right)$$

を使って消去すると

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=\frac{\gamma v^2}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}-v\left(\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_z}{\partial z'}\right)-\gamma\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

さらに、少しだけ整理すると

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z+vB_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y-vB_z\right)=-\gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial B_x}{\partial t'}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

を得ることが出来ます。

0.3.2 電磁誘導の法則の y 成分

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

について合成関数の微分を使うと (0 となる自明な項は無視して)

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial E_z}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{\partial E_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}-\frac{\partial B_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

となります。ここに $\frac{\partial x'}{\partial x}=\gamma$、$\frac{\partial t'}{\partial x}=-\frac{v\gamma}{c^2}$、$\frac{\partial x'}{\partial t}=-\gamma v$、$\frac{\partial t'}{\partial t}=\gamma$ を使うことにより

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x'}+\frac{v\gamma}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}=\gamma v\frac{\partial B_y}{\partial x'}-\gamma\frac{\partial B_y}{\partial t'}$$

を得ます。同類の項をまとめて

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_z+vB_y\right)=-\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_y-\frac{v}{c^2}E_z\right)$$

となります。

0.3.3　電磁誘導の法則の z 成分

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

について合成関数の微分を使うと (0 となる自明な項は無視して)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}-\frac{\partial B_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

となります。ここに $\frac{\partial x'}{\partial x}=\gamma$、$\frac{\partial t'}{\partial x}=-\frac{v\gamma}{c^2}$、$\frac{\partial x'}{\partial t}=-\gamma v$、$\frac{\partial t'}{\partial t}=\gamma$ を使うことにより

$$\gamma\frac{\partial E_y}{\partial x'}-\frac{v\gamma}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t'}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=\gamma v\frac{\partial B_z}{\partial x'}-\gamma\frac{\partial B_z}{\partial t'}$$

を得ます。同類の項をまとめて

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y-vB_z\right)-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)$$

となります。

0.3.4　電磁誘導、まとめると

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z+vB_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y-vB_z\right)=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

x 成分の式だけ両辺に γ をかけて、他の式とあわせると

$$\gamma\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z+vB_y\right)-\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y-vB_z\right)=-\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z`}-\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_z+vB_y\right)=-\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_y-\frac{v}{c^2}E_z\right)$$
$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y-vB_z\right)-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)$$

となります。これ等の式の左辺に $\vec{v}\times\vec{B}$ すなわち、Lorentz 力に関係した項が出てきているのに気が付いたでしょうか??!!

0.4　マックスウェル・アンペールの法則

次に Maxwell-Ampere の法則

$$\nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
$$=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

について見ていきましょう。やりかたは今までと同じですから、以下少し省略して書いていきます。

0.4.1 マックスウェル・アンペールの法則の x 成分

$$\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

より、合成関数の微分、および電荷の存在しないときのガウスの法則を組み合わせて

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)=\frac{1}{\gamma c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}$$

となります。

0.4.2 マックスウェル・アンペールの法則の y 成分と z 成分

同様にして

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)&=\frac{\gamma}{c^2}\left(E_y-vB_z\right)\\ \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)-\frac{\partial B_x}{\partial y'}&=\frac{\gamma}{c^2}\left(E_z+vB_y\right)\end{aligned}$$

0.5 新しい座標系 (x’,y’,z’,t’) における Maxwell の方程式

$$\gamma\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z+vB_y\right)-\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y-vB_z\right)=-\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_z+vB_y\right)&=-\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_y-\frac{v}{c^2}E_z\right)\\ \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y-vB_z\right)-\frac{\partial E_x}{\partial y'}&=-\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)\\ \gamma\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)-\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}\\ \frac{\partial B_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)&=\frac{\gamma}{c^2}\left(E_y-vB_z\right)\\ \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)-\frac{\partial B_x}{\partial y'}&=\frac{\gamma}{c^2}\left(E_z+vB_y\right)\end{aligned}$$

少し書き換えて

$$\frac{\partial}{\partial y'}\boxed{\gamma\left(E_z+vB_y\right)}-\frac{\partial}{\partial z'}\boxed{\gamma\left(E_y-vB_z\right)}=-\frac{\partial}{\partial t'}\left[B_x\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z'}\boxed{E_x}-\frac{\partial}{\partial x'}\boxed{\gamma\left(E_z+vB_y\right)}&=-\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_y-\frac{v}{c^2}E_z\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial x'}\boxed{\gamma\left(E_y-vB_z\right)}-\frac{\partial}{\partial y'}\boxed{E_x}&=-\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial y'}\left[\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z'}\left[\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)\right]&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\boxed{E_x}\\ \frac{\partial}{\partial z'}\left[B_x\right]-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)\right]&=\frac{1}{c^2}\boxed{\gamma\left(E_y-vB_z\right)}\\ \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left[\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y'}\left[B_x\right]&=\frac{1}{c^2}\boxed{\gamma\left(E_z+vB_y\right)}\end{aligned}$$

これ等の式において $\boxed{}$ で囲んだ項と [　] で囲んだ項に注目してください。これ等の式で $\boxed{}$ で囲んだ項について

$$\boxed{E_x}\rightarrow E_x^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} \to E_y^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} \to E_z^*$$

[ ] で囲んだ項について

$$[B_x] \to B_x^*$$

$$\left[\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] \to B_y^*$$

$$\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] \to B_z^*$$

と書いてみると

$$\frac{\partial}{\partial y'}\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} - \frac{\partial}{\partial z'}\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[B_x\right]$$

が

$$\frac{\partial E_z^*}{\partial y'} - \frac{\partial E_z^*}{\partial y'} = -\frac{\partial B_x^*}{\partial t'}$$

すなわち

$$\left(\nabla' \times \vec{E^*}\right)_x = -\left(\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}\right)_x$$

に対応していることが分かります。ここで演算子 $\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y'}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z'}\hat{z}$ は系 (x', y', z', t') における演算子です。次に

$$\frac{\partial}{\partial z'}\boxed{E_x} - \frac{\partial}{\partial x'}\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_y - \frac{v}{c^2}E_z\right)\right]$$

が

$$\frac{\partial E_x^*}{\partial z'} - \frac{\partial E_z^*}{\partial x'} = -\frac{\partial B_y^*}{\partial t'}$$

これは

$$\left(\nabla' \times \vec{E^*} = -\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}\right)_y$$

に対応している。同様に、上に示した結果もまとめて書くと

$$\frac{\partial}{\partial y'}\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} - \frac{\partial}{\partial z'}\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[B_x\right] \to \left(\nabla' \times \vec{E^*} = -\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}\right)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z'}\boxed{E_x} - \frac{\partial}{\partial x'}\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_y - \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] \to \left(\nabla' \times \vec{E^*} = -\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}\right)_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} - \frac{\partial}{\partial y'}\boxed{E_x} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] \to \left(\nabla' \times \vec{E^*} = -\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}\right)_z$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial z'}\left[\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\boxed{E_x} \to \left(\nabla' \times \vec{B^*} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E^*}}{\partial t'}\right)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z'}\left[B_x\right] - \frac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] = \frac{1}{c^2}\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} \to \left(\nabla' \times \vec{B^*} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E^*}}{\partial t'}\right)_y$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left[\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y'}\left[B_x\right] = \frac{1}{c^2}\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} \to \left(\nabla' \times \vec{B^*} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E^*}}{\partial t'}\right)_z$$

が成立することが分かります。これは (x, y, z, t) 系における電磁場 $\vec{E}(x, y, z, t)$Lorentz 変換にしたがって変数を (x', y', z', t') にしそれをルール

$$\boxed{E_x} \to E_x^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} \to E_y^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} \to E_z^*$$

$$[B_x] \to B_x^*$$

$$\left[\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] \to B_y^*$$

$$\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] \to B_z^*$$

に従って、新たな電磁場 $\vec{E^*}$ および $\vec{B^*}$ を作ると、それが系 (x', y', z', t') での Maxwell の方程式を (正確に表現すると Maxwell の方程式のうち、電磁誘導の法則と Maxwell-Ampere の法則)

$$\nabla' \times \vec{E^*} = -\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}$$

および

$$\nabla' \times \vec{B^*} = \frac{1}{c^2}\frac{\vec{E^*}}{\partial t'}$$

を満たしていることを示しています。これは、系 (x, y, z, t) において Maxwell の方程式が成立していれば、Lorentz 変換による変数変換と、元の系での電磁場を組み合わせることによって、系 (x',y',z',t') での Maxwell の方程式を満たす電磁場を見つけ出すことが出来ることを示せしています。また、この新しい系 (x',y',z',t') における電磁場は $\lim_{v\to 0}, \lim_{\gamma\to 1}$ の極限で連続的に元の系での電磁場になることも明らかです。
また、定数 c は、元の系と全く同じです。

ここから導かれる最も重要なことは、この「世界」でも光速は $c = (\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}})$ ですから同じであるということです!!!!!!!

この結果は、真空中の光速は違いに等速直線運動している系では同じになるという Michelson-Morely の実験結果に一致しています。この実験は現在でも遥かに高い精度で続けられており、光速の不変性が実験的に確立しています。

以上が Maxwell の方程式の Lorentz 変換にたいする不変性の (の滅茶苦茶泥くさい) 証明です。ここで決めた系 (x', y', z', t') での電場および磁束密度を使ってガウスの法則 (ここでは電荷、電流がない) ので $\nabla' \cdot \vec{E^*} = 0$、および磁気単極子無しの法則 $\nabla' \cdot \vec{B^*} = 0$ を示すことが出来ます。
例題
一定の磁束密度 $\vec{B_0} = B_0\hat{z}$ 中で、電荷 q を持った荷電粒子を一定の速度 $\vec{v_0} = v_0\hat{x}$ で直線運動をさせるためには y 軸の正の方向にどれだけに大きさの電場をかけたら良いか?(大学の入試によく出る問題)
このとき、荷電粒子と一緒に運動する系で見ると、電磁場はどのように見えるか考えなさい。

解答
磁束密度 $\vec{B_0}$ から動いている荷電粒子 q には Lorentz 力

$$\vec{F_L} = q\vec{v_0} \times \vec{B_0}$$

が働く、ここで $\vec{B_0} = B_0\hat{z}, \vec{v_0} = v_0\hat{x}$ ですから

$$\vec{F_L} = qv_0B_0\hat{x} \times \hat{z} = -qv_0B_0\hat{y}$$

ですから、この力をキャンセルするためには、

$$\vec{E} = v_0B_0\hat{y}$$

の電場をかければ良いことになる。このとき荷電粒子 q と一緒に、運動している系では

$$E_x^* = 0 \ \ (x \text{ 方向の電場はもともと存在しない})$$

$$E_y^* = \gamma(E_0 - v_0 B_0) = \gamma(v_0 B_0 - v_0 B_0) = 0$$

$$E_z^* = 0 \ \ (B_y, E_z \text{がもともと } 0 \text{ だから})$$

$$B_x^* = 0 \ \ (x \text{ 方向の磁束密度はもともと存在しない})$$

$$B_y^* = 0 \ \ (B_y, E_z \text{がもともと } 0 \text{ だから})$$

$$B_z^* = \gamma(B_0 - \frac{v_0}{c^2} v_0 B_0) = \frac{B_0}{\gamma}$$

となります。ここで、この系では荷電粒子は運動していませんから、磁束密度が存在しても運動には影響は与えません。(チャンチャン!!) 重要なことは、電場が完全にキャンセルしていることです!!

問題 7-4

上の例題で、任意の速度で x 軸の正の方向に運動している系での荷電粒子の運動について (荷電粒子に働く **Lorentz** 力について) 議論してください。

問題 7-5

上で求めた変換

$$\boxed{E_x} \rightarrow E_x^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} \rightarrow E_y^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} \rightarrow E_z^*$$

$$[B_x] \rightarrow B_x^*$$

$$\left[\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] \rightarrow B_y^*$$

$$\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] \rightarrow B_z^*$$

で、系 (x, y, z, t) から系 (x', y', z', t') に変換し、さらに系 (x', y', z', t') から (x, y, z, t) に変換すると電磁場が元に戻ることを、実際に計算して示しなさい。

0.5.1 系 (x',y',z',t') でのガウスの法則および磁気単極子なしの法則

$$\nabla'\cdot\vec{E^*}=\frac{\partial E_x^*}{\partial x'}+\frac{\partial E_y^*}{\partial y'}+\frac{\partial E_z^*}{\partial z'}$$

において

$$E_x^*=\boxed{E_x}$$

$$E_y^*=\boxed{\gamma\left(E_y-vB_z\right)}$$

$$E_z^*=\boxed{\gamma\left(E_z+vB_y\right)}$$

を代入して計算していくと

$$\begin{aligned}\nabla'\cdot\vec{E^*}&=\frac{\partial E_x}{\partial x'}+\gamma\frac{\partial E_y-vB_z}{\partial y'}+\gamma\frac{\partial E_z+vB_y}{\partial z'}\\
&=\frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial E_x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'}+\gamma\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}-v\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial y'}+\gamma\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}+v\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial z'}\\
&=\gamma\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\gamma\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}-v\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\times 1+\gamma\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}+v\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\times 1\\
&=\gamma\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)+\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\gamma\left(v\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)+\gamma\left(v\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\\
&=\gamma\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)+\gamma v\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\\
&=\gamma\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)+\gamma v\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

となります。この最初の項は (x,y,z,t) でのガウスの法則から 0 です。また第 2 項は電流の存在しない真空中での Maxwell-Ampere の法則の x 成分

$$\left(\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)_x$$

ですから、0 になり、結局

$$\nabla'\cdot\vec{E^*}=0$$

が示されたことになります。
磁気単極子なしの法則

$$\nabla'\cdot\vec{B^*}=0$$

も同様に示すことが出来て (x',y',z',t') での真空中の Maxwell の方程式

$$\nabla'\cdot\vec{E^*}=0$$

$$\nabla'\cdot\vec{B^*}=0$$

$$\nabla'\times\vec{E^*}=-\frac{\partial\vec{B^*}}{\partial t'}$$

$$\nabla'\times\vec{B^*}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E^*}}{\partial t'}$$

が全て示されたことになります。
問題 7-5
ガウスの法則の証明に習って、「磁気単極子なしの法則」を示しなさい。

ガリレイ変換と Maxwell の方程式

ガリレイ変換は Lorentz 変換の $\gamma = 1$ としたものですから Lorentz 変換

$$\begin{array}{cc}
\text{変換} & \text{逆変換} \\
x' = \gamma(x - vt) & x = \gamma(x' + vt') \\
y' = y & y = y' \\
z' = y & z = y' \\
t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) & t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma & \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 & \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 & \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{\gamma v}{c^2} & \frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma & \frac{\partial y}{\partial x'} = 0 & \frac{\partial z}{\partial x'} = 0 & \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{\gamma v}{c^2} \\
\frac{\partial x'}{\partial y} = 0 & \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 & \frac{\partial z'}{\partial y} = 0 & \frac{\partial t'}{\partial y} = 0 & \frac{\partial x}{\partial y'} = 0 & \frac{\partial y}{\partial y'} = 1 & \frac{\partial z}{\partial y'} = 0 & \frac{\partial t}{\partial y'} = 0 \\
\frac{\partial x'}{\partial z} = 0 & \frac{\partial y'}{\partial z} = 0 & \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 & \frac{\partial t'}{\partial z} = 0 & \frac{\partial x}{\partial z'} = 0 & \frac{\partial y}{\partial z'} = 0 & \frac{\partial z}{\partial z'} = 1 & \frac{\partial t}{\partial z'} = 0 \\
\frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v & \frac{\partial y'}{\partial t} = 0 & \frac{\partial z'}{\partial t} = 0 & \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma & \frac{\partial x}{\partial t'} = \gamma v & \frac{\partial y}{\partial t'} = 0 & \frac{\partial z}{\partial t'} = 0 & \frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma
\end{array}$$

に対して、以下のように書くことが出来ます。

$$\begin{array}{cc}
\text{変換} & \text{逆変換} \\
x' = (x - vt) & x = (x' + vt') \\
y' = y & y = y' \\
z' = y & z = y' \\
t' = t & t = t'
\end{array}$$

ガリレイ変換の特徴は時間 (時刻) はどちらの系でも同じで、しかも位置 x に依存しないことです!!そのために、電磁場の変換に必要な $\frac{\partial t'}{\partial x}$ 等も以下のように変化します (簡単になります)。

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 & \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 & \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 & \frac{\partial t'}{\partial x} = 0 & \frac{\partial x}{\partial x'} = 1 & \frac{\partial y}{\partial x'} = 0 & \frac{\partial z}{\partial x'} = 0 & \frac{\partial t}{\partial x'} = 0 \\
\frac{\partial x'}{\partial y} = 0 & \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 & \frac{\partial z'}{\partial y} = 0 & \frac{\partial t'}{\partial y} = 0 & \frac{\partial x}{\partial y'} = 0 & \frac{\partial y}{\partial y'} = 1 & \frac{\partial z}{\partial y'} = 0 & \frac{\partial t}{\partial y'} = 0 \\
\frac{\partial x'}{\partial z} = 0 & \frac{\partial y'}{\partial z} = 0 & \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 & \frac{\partial t'}{\partial z} = 0 & \frac{\partial x}{\partial z'} = 0 & \frac{\partial y}{\partial z'} = 0 & \frac{\partial z}{\partial z'} = 1 & \frac{\partial t}{\partial z'} = 0 \\
\frac{\partial x'}{\partial t} = -v & \frac{\partial y'}{\partial t} = 0 & \frac{\partial z'}{\partial t} = 0 & \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 & \frac{\partial x}{\partial t'} = v & \frac{\partial y}{\partial t'} = 0 & \frac{\partial z}{\partial t'} = 0 & \frac{\partial t}{\partial t'} = 1
\end{array}$$

このときの、Maxwell の方程式がどのように変換されるかを確かめて見ましょう。もう誰でも (偏微分の概念を教えれば高校生でも) 出来ることですから、以下計算は省きましょうか?
AGU の方々ですから始めの一歩は一緒にやるとしましょう。例によって

0.5.2　ガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \leftarrow \text{電荷のない真空中でのガウスの法則}$$

ここで電場 $\vec{E}$ は $\vec{E}(x,y,z,t)$ のように (x,y,z,t) の関数ですが、ガリレイ変換にしたがって $x = x' + vt'$ のように (x,y,z,t) を x' 等を使って $\vec{E}(x(x',y',z',t'), y(x',y',z',t'), z(x',y',z',t'), t(x',y',z',t'))$ と書くことによって $\vec{E}$ は (x',y',z',t') の関数 $\vec{E}(x',y',z',t')$ とすることが出来ます。(ただし、これは系 (x',y',z',t') での「電場」ではありません。そこのところヨロシク!!) また、逆に x' は $x'(x,y,z,t)$ ですから、今作った関数 $\vec{E}(x',y',z',t')$ を使って、上の式 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ を $E(x',y',z',y')$ での式にすることが出来ます。実行すると

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

ここで

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

となります。さらに $\frac{\partial x'}{\partial x} = 1$ で他はすべて 0 ですから

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \times 1 + \frac{\partial E_x}{\partial y'} \times 0 + \frac{\partial E_x}{\partial z'} \times 0 + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \times 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x'}$$

となります。同様にして

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y'}$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z'}$$

よって

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} = 0$$

となります。ナンテ分かり易いんだ「ガリレイ変換」!!!!!

0.5.3　磁気単極しなしの法則

これは、前記の「ガウスの法則」とまったく同様にして、

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0$$

となります。

0.5.4　電磁誘導の法則

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

の各成分について変換を行うと (計算は省略します。いくらなんでももう出来る筈ですから。)
x 成分について

$$\frac{\partial}{\partial y'}(E_z + vB_y) - \frac{\partial}{\partial z'}(E_y - vB_z) = -\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

y 成分について

$$\frac{\partial}{\partial z'}E_x - \frac{\partial}{\partial x'}(E_z + vB_y) = -\frac{\partial B_y}{\partial t'}$$

z 成分についても同様に

$$\frac{\partial}{\partial x'}(E_y - vB_z) - \frac{\partial}{\partial y'}E_x = -\frac{\partial B_z}{\partial t'}$$

を得ます。

0.5.5 Maxwell-Ampere の法則 (真空中)

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

についても同様に x 成分について

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}$$

y 成分について

$$\frac{\partial}{\partial z'}B_x - \frac{\partial}{\partial x'}\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t'}$$

z 成分ついても

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) - \frac{\partial}{\partial y'}B_x = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}$$

を得ることが出来ます。全てまとめて

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z + vB_y\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y - vB_z\right) = -\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'}E_x - \frac{\partial}{\partial x'}\left(E_z + vB_y\right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y - vB_z\right) - \frac{\partial}{\partial y'}E_x = -\frac{\partial B_z}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'}B_x - \frac{\partial}{\partial x'}\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) - \frac{\partial}{\partial y'}B_x = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}$$

この結果には、Lorentz 変換のときに見られた

$$\frac{\partial}{\partial y'}\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} - \frac{\partial}{\partial z'}\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[B_x\right] \to \left(\nabla' \times \vec{E^*}\right)_x = -\left(\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}\right)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z'}\boxed{E_x} - \frac{\partial}{\partial x'}\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_y - \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] \to \left(\nabla' \times \vec{E^*} = -\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}\right)_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} - \frac{\partial}{\partial y'}\boxed{E_x} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] \to \left(\nabla' \times \vec{E^*} = -\frac{\partial \vec{B^*}}{\partial t'}\right)_z$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial z'}\left[\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\boxed{E_x} \to \left(\nabla' \times \vec{B^*} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E^*}}{\partial t'}\right)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z'}\left[B_x\right] - \frac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] = \frac{1}{c^2}\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} \to \left(\nabla' \times \vec{B^*} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E^*}}{\partial t'}\right)_y$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left[\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y'}\left[B_x\right] = \frac{1}{c^2}\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} \to \left(\nabla' \times \vec{B^*} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E^*}}{\partial t'}\right)_z$$

の綺麗な対応が失われていることが分かると思います。すなわち

ガリレイ変換は Maxwell の方程式を保存しない!!!

ことが示されたことになります!!!!

0.6　連続の方程式と Lorentz 変換

連続の方程式 (電荷保存の式)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{i}=0$$

が Lorentz 変換に対してどのように変換するかを考えて見ましょう。この式は偏微分記号を使って書けば

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial i_x}{\partial x}+\frac{\partial i_y}{\partial y}+\frac{\partial i_z}{\partial z}=0$$

これを (x',y',z',t') で書きなをしてみると

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

ここで 12 ページーにまとめた変換関係を使うと

$$=-\gamma v\frac{\partial\rho}{\partial x'}+\frac{\partial\rho}{\partial y'}\times 0+\frac{\partial\rho}{\partial z'}\times 0+\gamma\frac{\partial\rho}{\partial t'}$$

$$=-\gamma v\frac{\partial\rho}{\partial x'}+\gamma\frac{\partial\rho}{\partial t'}$$

空間微分の項も同様にして

$$\frac{\partial i_x}{\partial x}=\gamma\frac{\partial i_x}{\partial x'}-\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial i_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial i_y}{\partial y}=\frac{\partial i_y}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial i_z}{\partial z}=\frac{\partial i_z}{\partial z'}$$

以上、まとめると連続の方程式 (電荷保存の式) は

$$\gamma\frac{\partial\rho}{\partial t'}-\gamma v\frac{\partial\rho}{\partial x'}+\gamma\frac{\partial i_x}{\partial x'}-\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial i_x}{\partial t'}+\frac{\partial i_y}{\partial y'}+\frac{\partial i_z}{\partial z'}=0$$

したがって、各項の属性 (時間微分なのか、空間微分なのか) によって分類して並べ替えると

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\gamma\left(\rho-\frac{v}{c^2}i_x\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x'}\left\{\gamma\left(i_x-v\rho\right)\right\}+\frac{\partial i_y}{\partial y'}+\frac{\partial i_z}{\partial z'}=0$$

この結果は慣性系 (x',y',z',t') では慣性系 (x,y,z,t) の電荷分布 ρ および電流密度 $\vec{i}$ が

$$\rho^*=\gamma\left(\rho-\frac{v}{c^2}i_x\right)$$

$$\vec{i^*}=\gamma\left(i_x-v\rho\right)\hat{x}+i_y\hat{y}+i_z\hat{z}$$

に変換されることを意味しています。ここで電荷分布が電流に繰り込まれる

$$\vec{i^*}=\gamma\left(i_x-v\rho\right)\hat{x}+i_y\hat{y}+i_z\hat{z}$$

における、$-v\rho$ の項は系が x 軸の正の方向に速さ v で動いているため、電荷分布は速さ v で x 軸の負の方向に動いて行くことに対応しています。

問題 7-6 上の説明で電荷分布 $\rho(t,\vec{r})$ が、動いている系から見ると電流に変化する (繰り込まれる) ことは理解できたと思います。では、ここで問題です!動いている系から見ると、静止している (つもりの) 系の電流がなぜ電荷に繰り込まれるか説明しなさい。

電荷、電流の存在する系での Maxwell の方程式の Lorentz 変換

これは、今までやって来たことのまとめみたいなものですから、計算は出来るだけ省略します。

$$\nabla \cdot \vec{E}(x,y,z,t) = \frac{\rho(x,y,z,t)}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(x,y,z,t) = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(x,y,z,t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(x,y,z,t) = \mu_0(\vec{i}(x,y,z,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

に Lorentz 変換を作用させると

$$\nabla \cdot \vec{E} = \gamma \left(\frac{\partial E_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'} \right) + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_y}{\partial z'} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \gamma \left(\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} \right) + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_y}{\partial z'} = 0$$

電磁誘導の法則に関しては電荷分布および電流は関係していませんから前に求めたものがそのまま使うことが出来ます。したがって問題となるのは

Maxwell-Ampere の法則ということになります。

0.6.1 電流が存在するときの Maxwell-Ampere の法則

誘電体が存在しないときの Maxwell-Ampere の法則は

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

と書くことが出来ます。ここで電流の部分は微分演算子が作用していないので、他の部分だけを計算すればよいことになりますが、それは以前にやったことと本質的に (と言うか、まったく) 同じですのでここでは簡単に説明していきます。

x 成分について

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

より、合成関数の微分、およびガウスの法則を組み合わせて

$$\frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} \right) + \mu_0 i_x$$

例によって

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v$$

より

$$\frac{\partial B_z}{\partial y'}-\frac{\partial B_y}{\partial z'}=\frac{1}{c^2}\left(\gamma\frac{\partial E_x}{\partial t'}-\gamma v\frac{\partial E_x}{\partial x'}\right)+\mu_0 i_x$$

また前に示したガウスの法則から

$$\gamma\left(\frac{\partial E_x}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}\right)+\frac{\partial E_y}{\partial y'}+\frac{\partial E_y}{\partial z'}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

より

$$\gamma v\frac{\partial E_x}{\partial x'}=\frac{\gamma v^2}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}-v\left(\frac{\partial E_y}{\partial y'}+\frac{\partial E_z}{\partial z'}\right)+\frac{v}{\varepsilon_0}\rho$$

を使って上式中の $\frac{\partial E_x}{\partial x'}$ を消去することによって

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)=\frac{1}{\gamma c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}+\mu_0 i_x-\frac{v}{\varepsilon_0 c^2}\rho$$

となります。ここで $\frac{1}{c^2}=\mu_0\varepsilon_0$ に注意して

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)=\frac{1}{\gamma c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}+\mu_0\left(i_x-v\rho\right)$$

最後に両辺に γ をかけて

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left\{\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial z'}\left\{\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)\right\}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}+\mu_0\gamma\left(i_x-v\rho\right)$$

同様にして y および z 成分の式は

$$\frac{\partial B_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)=\frac{\gamma}{c^2}\left(E_y-vB_z\right)+\mu_0 i_y$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)-\frac{\partial B_x}{\partial y'}=\frac{\gamma}{c^2}\left(E_z+vB_y\right)+\mu_0 iz$$

以上、電磁誘導の法則の各成分と Maxwell-Ampere の法則の各成分を書くと

$$\gamma\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z+vB_y\right)-\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y-vB_z\right)=-\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z`}-\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_z+vB_y\right)=-\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_y-\frac{v}{c^2}E_z\right)$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y-vB_z\right)-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)-\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'}+\gamma\mu_0\left(i_x-v\rho\right)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)=\frac{\gamma}{c^2}\left(E_y-vB_z\right)+\mu_0 i_y$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)-\frac{\partial B_x}{\partial y'}=\frac{\gamma}{c^2}\left(E_z+vB_y\right)+\mu_0 i_z$$

ここで以前に示した変換

$$\boxed{E_x}\rightarrow E_x^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_y-vB_z\right)}\rightarrow E_y^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_z+vB_y\right)}\rightarrow E_z^*$$

$$\left[B_x\right]\rightarrow B_x^*$$

$$\left[\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)\right]\rightarrow B_y^*$$

$$\left[\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)\right]\to B_z^*$$

および「連続の方程式 (電荷保存の法則)」のところで示した変換

$$\rho^*=\gamma\left(\rho-\frac{v}{c^2}i_x\right)$$

$$\vec{i^*}=\gamma\left(i_x-v\rho\right)\hat{x}+i_y\hat{y}+i_z\hat{z}$$

を用いれば系 (x',y',z',t') での Maxwell の方程式が

$$\nabla'\cdot\vec{E^*}=\frac{\rho^*}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla'\cdot\vec{B^*}=0$$

$$\nabla'\times\vec{E^*}=-\frac{\partial\vec{B^*}}{\partial t'}$$

$$\nabla'\times\vec{B^*}=\mu_0\vec{i^*}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E^*}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t'}+\nabla'\cdot\vec{i^*}$$

が成立していることが確かめられます。(確かめてみてください!!!!)

応用編

ここまでは、ほとんど数学でしたね。(数学と言うほど高級では無いけれど…合成関数の偏微分だけですから…本当の相対論の数学は山口いや違った山崎先生に任せて、ここでは電磁気学での応用をやって行きましょう。) まず、前章までに求めた結果を、もう少し一般的に書いておきましょう。

$$\boxed{E_x} \to E_x^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} \to E_y^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} \to E_z^*$$

$$[B_x] \to B_x^*$$

$$\left[\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] \to B_y^*$$

$$\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] \to B_z^*$$

において速度は $v\hat{x}$ ですから運動に平行な方向 (成分) では電場、磁束密度共に変化していないことが、系の運動に垂直な方向では

$$\vec{v} \times \vec{E}\text{または}\vec{v} \times \vec{B}$$

が電磁場の変換; 電場が磁場 (磁束密度) に変わったり、磁場 (磁束密度) が電場に変化したりすることを示しています。また、「連続の方程式 (電荷保存の法則)」のところで示した変換では、ある系で電荷分布だったものが、動いている系から見ると電流だったりすること (これはある意味当り前ですが) を示しています。

$$\rho^* = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2}i_x\right)$$

$$\vec{i^*} = \gamma\left(i_x - v\rho\right)\hat{x} + i_y\hat{y} + i_z\hat{z}$$

この結果は、例えば「点電荷 Q が速度 $\vec{v}$ で x 軸の正の方向に動いているときの電磁場を求めなさい。と言う問題があったときには、先ず、点電荷が静止している系の電磁場を求めて、それを上の変換式で変換すればよいことになります。(実際はそれほど簡単ではない!!が)

やって見ましょう!!!

例題

系 S_1 に対してその x 軸の正の方向に一定の速さ v で動いている系 S_2 があります。今、S_1 の原点に点電荷 Q があります。この点電荷 Q の作る電磁場を系 S_2 で見たときどのように見えるか、Lorentz 変換を使って決定しなさい。

解答

S_1 の座標を (x, y, z, t) で S_2 の座標を (x', y', z', t') で表す。、S_1 においての電場は静電場[3] であるから簡単に

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

[3] 静電場という言葉は相対論からいうと多少問題があります。例えば、点電荷の作る電場を考えたとき、この点電荷が無限の過去から存在したいと「静電場」にはならないっことは明らかでしょう．また「無限直線電荷」や「無限直線電流」なども、多少問題があることも理解して下さい。

と書くことが出来る。レシピーにしたがって、これを (x',y',z',t') を使って書くと Lorentz 変換より $x=\gamma(x'+vt')$,$y=y'$,$z=z'$,$t=\gamma(t'-\frac{xx'}{c^2})$ であるから

$$\vec{E}(x',y',z',t')=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma(x'+vt')\hat{x}+y'\hat{y}+z'\hat{z}}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

よって

$$E_x(x',y',z',t')=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma(x'+vt')}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$E_y(x',y',z',t')=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$E_z(x',y',z',t')=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

当然ですが

$$B_x(x',y',z',t')=0$$
$$B_y(x',y',z',t')=0$$
$$B_z(x',y',z',t')=0$$

したがって S_2 における電磁場を $\vec{E^*},\vec{B^*}$ とすると

$$E_x^*(x',y',z',t')=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma(x'+vt')}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$E_y^*(x',y',z',t')=\gamma\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$E_z^*(x',y',z',t')=\gamma\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

S_1 では存在しなかった磁束密度が

$$B_x^*(x',y',z',t')=0$$
$$B_y^*(x',y',z',t')=\frac{\gamma v}{c^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$B_z^*(x',y',z',t')=-\frac{\gamma v}{c^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{\left[\{\gamma(x'+vt')\}^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

だけ存在することになります。

この結果は何も驚くことはなく、この系では点電荷 Q が動いているため

$$\vec{i^*}(x',y',z',t')=\gamma(i_x(x',y',z',t')-v\rho(x',y',z',t'))\hat{x}+i_y(x',y',z',t')\hat{(y)}+i_z(x',y',z',t')\hat{z}$$

すなわち $-\gamma vQ\delta(\gamma(x'+vt'))\delta(y')\delta(z')\hat{x}$ で表される電流が存在するわけです。この電流が磁場を作ったと考えればよいことになります。

ここで時間の遅れが出なかったのは例題として残念ですが。等速直線運動をしている荷電粒子からは電磁波は出ませんし、元が静電場ですからよしとしましょう!!!

また系が加速度運動すると特殊相対性理論 (Lorentz 変換) だけを使って、簡単に取り扱うことはできなくなりますから…。もちろん、荷電粒子が加速度運動している (円運動や単振動など) をしている場合には、前の章でやった遅延ポテンシャルで (したがって Maxwell の方程式で) とくことができます。(前の章参照のこと)

例題 2
無限直線電荷の作る電場、この場合、電荷は x 軸上に一定の線密度 λ_0[C/m] で分布していると仮定しましょう。
解答
このとき電荷分布と一緒に止まっている系 (以下 S) で見ると、これは簡単な静電場の問題ですから、ガウスの法則を使って電場は

$$\vec{E}(x,t,z,t) = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{y\hat{y}+z\hat{z}}{y^2+z^2}$$

と書けます。これを x 軸方向に速度 v で動いている系 (x',y',z',t')(以下 S$'$ と表記) から見ると、Lorentz 変換より、先ずこの電場を変数 (x',y',z',t') を使って書くと $x=\gamma(x'+vt')$,$y=y'$,$z=z'$,$t=\gamma(t'-\frac{xx'}{c^2})$ ですから

$$\vec{E}(x',y',z',t') = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{y'\hat{y}+z'\hat{z}}{y'^2+z'^2}$$

よって

$$E_x(x',y',z',t') = 0$$
$$E_y(x',y',z',t') = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{y'}{y'^2+z'^2}$$
$$E_z(x',y',z',t') = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{z'}{y'^2+z'^2}$$

当然ですが

$$B_x(x',y',z',t') = 0$$
$$B_y(x',y',z',t') = 0$$
$$B_z(x',y',z',t') = 0$$

したがって S$'$ における電磁場を $\vec{E^*},\vec{B^*}$ とすると

$$E^*_x(x',y',z',t') = 0$$
$$E^*_y(x',y',z',t') = \gamma\frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{y'}{y'^2+z'^2}$$
$$E^*_z(x',y',z',t') = \gamma\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{y'^2+z'^2}$$

S$_1$ では存在しなかった磁束密度が

$$B^*_x(x',y',z',t') = 0$$
$$B^*_y(x',y',z',t') = \frac{\gamma v}{c^2}\frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{z'}{y'^2+z'^2}$$
$$B^*_z(x',y',z',t') = -\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{y'}{y'^2+z'^2}$$

だけ存在することになります。これは系 S$'$ から見たとき、電荷は x 軸の負の方向に動いている、すなわち、x の負の方向に流れる電流が存在することになるためです。磁束密度の回転方向もそのようになっているはずですから、確かめてみてください。

以上、簡単な例だけでしたが、こんなところにも相対性理論は使われています。(実際に使ったのは Lorentz 変換だけですが…) このように電磁気学と相対性理論は切っても切れない関係にあるわけです。ですから相対性理論は間違っている…という議論をよく耳にしますが数学を使えないヒトのそのような意見 (異見?) には十分注意して取り組んでください。言葉だけではネー…

問題 7-7

無限直線電流の作る電磁場について、直線電流の方向に動いている系から見たときの様子を議論してください。

0.7 略解答

問題 **7-1**

実際に計算すると

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ \gamma\left(x - vt\right) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となり、確かに **Lorentz** 変換になっているのがわかる。

問題 **7-2**

上で求めた行列の逆行列になっていればよい。実施に行列の積を計算すると

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) & \gamma^2\left(\frac{v}{c^2} - \frac{v}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ -\gamma^2 v + \gamma^2 v & \gamma^2\left(-\frac{v^2}{c^2} + 1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}(\text{単位行列})$$

物理的な理由をについては自明ですから省略。

問題 **7-3**

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\frac{\gamma_1 v_1}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{ただし}\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{v_1}^2}{c^2}\right)}}$$

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\frac{\gamma_2 v_2}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \text{ただし}\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{v_2}^2}{c^2}\right)}}$$

ですから、

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\frac{\gamma_2 v_2}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\frac{\gamma_1 v_1}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) & -\gamma_1\gamma_2\left(\frac{v_1 + v_2}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\left(v_1 + v_2\right) & \gamma_1\gamma_2\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

が成立します。この変換に対応した行列が **Lorentz** 変換のかたち

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし}\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

と書ければ良いことになり、この v が v_1, v_2, c の関数として決定できればいいことになります。ここで気にして欲しいのは

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right) & -\gamma_1\gamma_2\left(\frac{v_1+v_2}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\left(v_1+v_2\right) & \gamma_1\gamma_2\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立するためには

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right)$$

$$\gamma\frac{v}{c^2} = \gamma_1\gamma_2\left(\frac{v_1+v_2}{c^2}\right)$$

および

$$\gamma v = \gamma_1\gamma_2\left(v_1+v_2\right)$$

が全て同時に成立するとうに v を決定しなければなりません (未知数は v 一個**!**式は **3** 個、実際は **2** 番目の式と **3** 番目の式は同じ式ですから、式は **2** 個、これは解が定まらない可能性を持っています。)。

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right)$$

より

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right)}}$$

これを解くと

$$v = \pm\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$$

物理的な解は

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$$

であることは明らか。この結果を **2** 番目の式に代入すると直ちに成立していることが示されます。したがって

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$$

が示されたことになり、かつ **Lorentz** 変換を **2** 回行った結果も **Lorentz** 変換であることがし示されたことになります。(示したのは、同じ x 軸方向に進んでいる場合だけですが。)

問題 **7-4** それぞれの速度に於ける、荷電粒子に働くローレンツ力を求めればいいわけです。したがって、それぞれの速度で動いている系の電磁場が求めれば、ローレンツ力は求まりますから、この問題は自分でじっくり考えて下さい。略解は省略します。でも非常に難しい問題ですよ**!!**元の系に対して動いている系から見た元の系に対して速度 $\vec{v_0}$ で動いている粒子の速度は、ガリレイ変換ではなく **Lorentz** 変換を使わないと求まらないので注意が必要です。**!!**

と書いたのですが、**AGU** の方には無理な気がしますので…

元の系を S_0,x 軸方向に速度 $v_1\hat{x}$ で S_0 に対して動いている系を S_1, ついでに粒子と一緒に S_0 に対して速度 $v_0\hat{x}$ で運動している系を S_2 とします。ここで問題 **7-3** で求めた **Lorentz** 変換の合成法則を使うと、系 S_0

に対して速度 v_0 で運動している粒子 (および系 S_2) は、系 S_1 から見たときには $v_0 - v_1$ で運動しているわけではなく、

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

の解として与えられる速度 $v_2 \hat{x}$ で運動しているはずです。したがってこれを v_2 について解くことによって

$$v_2 = \frac{v_0 - v_1}{1 - \frac{v_0 v_1}{c^2}}$$

を得ることができます。速度 v_0, v_1 が c に対して十分小さければ、分母の **2** 次の微小量を無視することによって

$$v_2 \approx v_0 - v_1 \qquad \text{ガリレイ変換}$$

をえます。系 s_0 で電磁場が $\vec{B} = B_0 \hat{z}, \vec{E} = v_0 B_0 \hat{y}$ で与えられているとき、系 S_1 では

$$\vec{E_1^*} = \gamma_1 (E_0 - v_1 B_0) \hat{y} = \gamma_1 (v_0 B_0 - v_1 B_0) \hat{y}$$

$$\vec{B_1^*} = \gamma_1 \left(B_0 - \frac{v_1}{c^2} E_0 \right) \hat{z} = \gamma_1 \left(B_0 - \frac{v_1}{c^2} v_0 B_0 \right) \hat{z}$$

与えられ、荷電粒子が

$$\vec{v_2} = \frac{v_0 - v_1}{1 - \frac{v_0 v_1}{c^2}} \hat{x}$$

で運動していますから、この系で見たときに粒子に働くローレンツ力は

$$\vec{F} = q \left(\vec{E_1^*} + \vec{v_2} \times \vec{B_1^*} \right)$$

となります。これに上の結果を代入すると

$$\begin{aligned}
&= q \left(\gamma_1 (v_0 B_0 - v_1 B_0) \hat{y} + \frac{v_0 - v_1}{1 - \frac{v_0 v_1}{c^2}} \hat{x} \times \gamma_1 \left(B_0 - \frac{v_1}{c^2} v_0 B_0 \right) \hat{z} \right) \\
&= q \left(\gamma_1 (v_0 B_0 - v_1 B_0) - \frac{v_0 - v_1}{1 - \frac{v_0 v_1}{c^2}} \gamma_1 \left(B_0 - \frac{v_0 v_1}{c^2} B_0 \right) \right) \hat{y} \\
&= q \left(\gamma_1 (v_0 - v_1) B_0 - \frac{v_0 - v_1}{1 - \frac{v_0 v_1}{c^2}} \gamma_1 \left(1 - \frac{v_0 v_1}{c^2} \right) B_0 \right) \hat{y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となって、どんな系から見ても (ここで示したのは x 軸方向に動いている系のみですが) 粒子には力 (ローレンツ力) が働かないことが示されました。みんな出来たかな??????????????????????

問題 **7-5**

本編で求めた変換

$$\boxed{E_x} \to E_x^*$$

$$\boxed{\gamma \left(E_y - v B_z \right)} \to E_y^*$$

$$\boxed{\gamma \left(E_z + v B_y \right)} \to E_z^*$$

$$[B_x] \to B_x^*$$

$$\left[\gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right] \to B_y^*$$

$$\left[\gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \right] \to B_z^*$$

で、系 (x, y, z, t) の電磁場を系 x 軸の正の方向に速度 v で運動している (x', y', z', t') から見た電磁場に変換し、さらに系 (x', y', z', t') から (x, y, z, t) に変換すると電磁場が元に戻ることを、実際に計算して示しなさ

いというのが問題です。(x', y', z', t') から元の (x, y, z, t) への変換は、速度が逆向きになるだけですから簡単に以下のように書けます。

$$\boxed{E_x\ *} \to E_x$$

$$\boxed{\gamma\left(E_y^* + vB_z^*\right)} \to E_y$$

$$\boxed{\gamma\left(E_z * - vB_y^*\right)} \to E_z$$

$$[B_x^*] \to B_x$$

$$\left[\gamma\left(B_y^* - \frac{v}{c^2}E_z^*\right)\right] \to B_y$$

$$\left[\gamma\left(B_z^* + \frac{v}{c^2}E_y^*\right)\right] \to B_z$$

となります。この式の E_x^* などに前に求めた

$$\boxed{E_x} \to E_x^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_y - vB_z\right)} \to E_y^*$$

$$\boxed{\gamma\left(E_z + vB_y\right)} \to E_z^*$$

$$[B_x] \to B_x^*$$

$$\left[\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] \to B_y^*$$

$$\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] \to B_z^*$$

を代入すると、

$$E_x \to E_x^* \to E_x$$

また

$$\boxed{\gamma\left(E_y^* + vB_z^*\right)} \to E_y$$

についても $E_y^* = \gamma\left(E_y - vB_z\right)$ および $B_z^* = \gamma\left(B_z - \frac{v}{E}{}_y c^2\right)$ を代入して左辺を変形すると

$$左辺 = \gamma\left\{\gamma\left(E_y - vB_z\right) + v\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right\}$$

$$= \gamma^2\left\{E_y - vB_z + v\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right\}$$

すなわち

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{v}{c^2}\right)E_y$$

をえます。ここで $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ですから左辺=右辺となり、この **2** 回の変換により電場の y 成分は元に戻ることが示されました。
他の成分および磁束密度についても同様に計算されます。したがって、以下略です**!!!**

問題 **7-6**

$$\nabla' \cdot \vec{B^*} = \frac{\partial B_x^*}{\partial x'} + \frac{\partial B_y^*}{\partial y'} + \frac{\partial B_z^*}{\partial z'}$$

を計算していきます。ここで分かっていることは、元の系で **Maxwell** の方程式が成立していることですから、求めた関係を使って、上の式を元の系での電磁場を使って書き直していきます。すなわち

$$[B_x] \to B_x^*$$

$$\left[\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right] \to B_y^*$$

$$\left[\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right] \to B_z^*$$

を代入し、各項の計算を進めていきます。

$$\nabla' \cdot \vec{B^*} = \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}\left\{\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z'}\left\{\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial B_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial B_x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} + \gamma\left(\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial y'} + \gamma\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial z'}$$

ここで、例によって $\frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma, \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{\gamma v}{c^2}, \frac{\partial y}{\partial y'} = 1, \frac{\partial z}{\partial z'} = 1$ を使って

$$= \gamma\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t} + \gamma\left(\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) + \gamma\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)$$

$$= \gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + \frac{\gamma v}{c^2}\left\{\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right\}$$

$$= \gamma\nabla \cdot \vec{B} + \frac{\gamma v}{c^2}\left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)$$

$$= \gamma\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) + \frac{\gamma v}{c^2}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E}\right)_x$$

$$= 0 + 0 = 0 \qquad \text{なぜ各項が } 0 \text{ になるか分かりますよね!!}$$

よって示された。この式は、証明の過程からも分かるように、電荷および電流が存在していても常に成立することに注意すること。

問題 **7-6**

略解答

これは、お互いに対して一定速度で運動している系から見たとき **Lorentz** 収縮が起こることにより説明されます。今系 S_0 においてマイナスの無限直線電荷 λ_{0-} が静止していて、プラスの無限直線電荷 λ_{0+} が系 S_1 と同じ速度 $v_1\hat{x}$ で運動することによって $\vec{i_0} = (\lambda_{0+})v_1\hat{x}$ および $(\lambda_{0-} + \lambda_{0+}) = 0$(電気的中性) が成立しているとすると、**Lorentz** 収縮から系 S_1 から見たときの電荷分布は

$$\lambda_{1-} = \gamma_1\lambda_{0-}, \quad \gamma_1\lambda_{1+} = \lambda_{0+} \qquad \text{ここで}\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$

が成立する。ここで、最初の式は系 S_1 に対して速さ v_1 で運動している電荷分布は長さ方向に $\frac{1}{\gamma_1}$ に縮むため、電荷密度が大きくなって見えること。**2** 番目の式は逆に S_0 に対して速さ v_1 で運動している系 S_1 と一緒に運動している電荷分布は、系 S_0 から見ると長さが縮んでいる分大きく見えており、したがって系 S_1 から見たときには、γ_1 分の **1** に見えることに対応しています。したがって系 S_1 から見た正味の電荷分布は

$$\lambda_{1+} + \lambda_{1-} = \gamma_1\left(\lambda_{0-} + \frac{1}{\gamma_1^2}\lambda_{0+}\right)$$

$$= \gamma_1\left(\lambda_{0-} + \lambda_{0+} - \frac{v_1^2}{c^2}\lambda_{0+}\right)$$

$$= -\gamma_1\left(\frac{v_1}{c^2}v_1\lambda_{0+}\right)$$

$$= -\gamma_1\left(\frac{v_1}{c^2}i_x\right)$$

が導かれます。これは前のページに示した電流から繰り込まれた電荷密度に対応していることが分かると思います。ここでは、計算が見やすいように $i_x = \lambda_{0+}v_1$ と仮定しましたが、もっと一般的な場合にも同様な結果を得ることが出来るので、さらなる練習問題としてやってみてください。

問題 **7-7**

アンペールの法則等を使って止っている系で磁束密度を求めると $\vec{B}(x,y,z) = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi}\dfrac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2}$ となります。この電磁場を z 軸方向に速度 $v\hat{z}$ で運動している系から見ると、例によって **20** ページにまとめた変換法則を使って (ただし進行方向が z 軸方向であることに注意して)

$$E_x^*(x',y',z') = -\gamma\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{vx'}{x'^2+y'^2}$$

$$E_y^*(x',y',z') = -\gamma\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{vy'}{x'^2+y'^2}$$

$$E_z^* = 0$$

$$B_x^*(x',y',z') = \gamma\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{-y'}{x'^2+y'^2}$$

$$B_y^*(x',y',z') = \gamma\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{x'}{x'^2+y'^2}$$

$$B_z^* = 0$$

となります。ここで S_1 系に対して、速度 $v\hat{z}$ で運動している系 S_1 では、z 軸から放射状に出ていく電場

$$E_x^*(x',y',z') = -\gamma\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{vx'}{x'^2+y'^2}$$

$$E_y^*(x',y',z') = -\gamma\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{vy'}{x'^2+y'^2}$$

が存在しますから、z 軸上には積分型のガウスの法則を使って線密度

$$\lambda' = -\gamma\varepsilon_0\mu_0 I_0 v$$

の無限直線電荷が存在することになります。ここで $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ ですからこの電荷密度は

$$\lambda' = -\gamma\frac{v}{c^2}I_0$$

と書けることが分かります。これは **16** ページで求めた、電荷分布と電流密度の変換則から得られる電流密度と電荷密度の変換そのものであることが分かると思います。また系 S_1 に於ける磁束密度から、電流が同じ変換則にしたがって変化していることも理解できると思います。