指数関数のもう一つの定義

$$e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \tag{3.59}$$

先の定義 (3.48) からこの定義 (3.59) を導出する。
先の定義 (3.48) に基づいて示した指数関数の基本的な性質に関する定理 (3.49) より

$$\begin{aligned} e^x &= \left(e^{x/N}\right)^N \\ &= \left\{1+\frac{x}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right\}^N \\ &= \left(1+\frac{x}{N}\right)^N + O\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned} \tag{3.60}$$

ここで $N\to\infty$ の極限をとれば

$$\begin{aligned} e^x &= \left(e^{x/N}\right)^N \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(e^{x/N}\right)^N \\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{N}\right)^N + O(\frac{1}{N})\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \end{aligned} \tag{3.61}$$

右辺の最後は定義 (3.59) である。

指数関数の微分

指数関数の定義 (3.48)

$$\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を x で微分すると第 1 項は消え、$(n+1)$ 番目の項は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{nx^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{3.62}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) \\ &= 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \\ &= e^x \end{aligned} \tag{3.63}$$

となる。

(注 無限級数の各項を独立に微分して良いかは本当は注意が必要。)

指数関数の微分

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{3.64}$$

指数関数の基本的な性質に関する定理 $e^x e^y = e^{x+y}$(3.49) の証明

指数関数の定義 (3.48) より

$$
\begin{aligned}
e^x e^y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right) \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x^n y^m}{n!m!} \qquad (3.65)
\end{aligned}
$$

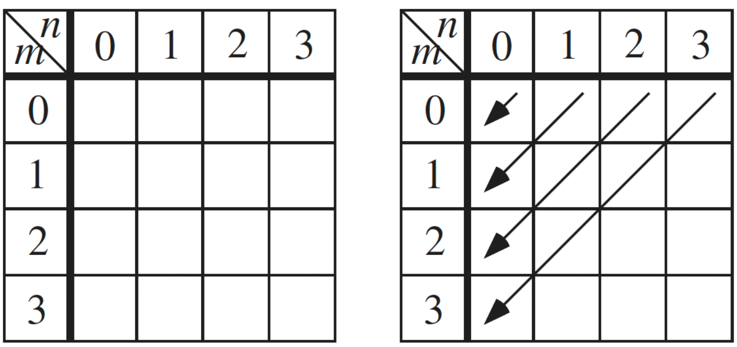
ここで m, n の和は独立に 0 から足し上げている。

和の取り方を変えて $k = m + n$ と n について和をとることにする (下右図参照)。すると、$m = k - n$ なので和は

$$
= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} \frac{x^n y^{k-n}}{n!(k-n)!} \right) \qquad (3.66)
$$

となる。二項定理を使って

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{x^n y^{k-n}}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x+y)^k \\
&= e^{x+y} \qquad (3.67)
\end{aligned}
$$



次の関数の導関数を求めよ。

$$e^{ax+b}, \quad e^{ax^2+bx+c}, \quad \exp(f(x)), \quad f\left(e^x\right)$$