

2019年度 実力テスト

専門問題（数学）

2020年1月16日（木）
12:50～14:50（120分）

解答上の注意

- 問題は全部で9題ある。そのうち 4題 を選択して答えよ。
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し、選択した問題番号を所定の欄に明記すること。問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない。
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し、解答用紙はすべて提出すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。ただしその旨を表面に明記すること。
- 試験開始から30分経過した後は、解答用紙を提出の上、退出を認める。

1 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = t + e^t$

(2) $\frac{dx}{dt} + tx = (t+1)e^t$

2 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{F}_5[x]$ 上の多項式

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x + 4, \quad g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

に対し, これらの最大公約多項式 $d(x)$ を求めよ. また, $a(x)f(x) + b(x)g(x) = d(x)$ を満たす $a(x), b(x) \in \mathbb{F}_5[x]$ を一組求めよ.

(2) G を群とし, H を G の部分群とする.

(1) $g \in G$ に対し,

$$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

は G の部分群であることを示せ.

(2) H が G の正規部分群であることの定義を書け. また, G が可換群ならば, 任意の部分群 H は G の正規部分群であることを示せ.

3 以下の問に答えよ.

(1) $\int_2^\infty x^{-\frac{3}{2}} dx, \int_3^\infty \frac{1}{x^2+3} dx$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) 広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ が収束するための正の定数 α に対する条件を求めよ.

(3) 広義積分 $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+2020} dx, \int_1^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$ の収束, 発散の判定をせよ. 積分値は求めなくてよい.

4 以下の問に答えよ.

(1) 写像 $f: X \rightarrow Y$ と Y の部分集合 A に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$$

(2) 距離空間 (X, d) の部分集合 A に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$(A^\circ)^c = \overline{A^c}$$

ただし, A° は A の内部, \overline{A} は A の閉包を表す.

(3) 位相空間 (X, \mathcal{O}) から位相空間 (X', \mathcal{O}') への連続写像 f と X の部分集合 A に対して, A がコンパクトならば $f(A)$ もコンパクトであることを示せ.

5 $f(z) = \frac{4z^2 - 3z - 1}{z^3 - 3z - 2}$ とする.

(1) $f(z)$ を部分分数に展開せよ.

(2) $f(z)$ の極を全て挙げ, それぞれの極に対して極の位数, およびその極におけるローラン展開の主要部を求めよ.

(3) 以下の複素積分の値を求めよ. ただし, 複素積分における積分路は反時計回りに向きづけられているとする.

(a) $\int_{|z|=3} f(z) dz$

(b) $\int_{|z-3|=2} 2z^2 f(z) dz$

6 測度空間 (X, \mathcal{F}, μ) 上の \mathbb{R} 値可積分関数 f, f_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) が 2 条件

(a) $\{f_n\}$ は X 上で f に各点収束

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X |f| d\mu$

を満たすとき, 以下の問に答えよ.

(1) Lebesgue の収束定理の内容を述べよ. また, Lebesgue の収束定理を用いて次を示せ.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n| > |f|\}} |f| d\mu = 0$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n| \leq |f|\}} |f_n - f| d\mu = 0$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n| \leq |f|\}} |f_n| d\mu = \int_X |f| d\mu$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ が成り立つことを示せ.

7 次の波動方程式の初期値・境界値問題を解け.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (u = u(x, t); 0 < x < 2, t > 0)$$

$$\text{初期条件: } u(x, 0) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ -x + 2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

$$\text{境界条件: } u(0, t) = u(2, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

8 実数パラメータ u, v により表される曲面

$$\begin{cases} x = v \sin \frac{u}{2} \\ y = (2 + v \cos \frac{u}{2}) \cos u \\ z = (2 + v \cos \frac{u}{2}) \sin u \end{cases}$$

について、 $(u, v) = (\pi, 0)$ におけるガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ.

9 以下の問に答えよ. 必要なら次ページの正規分布表を用いてよい.

(1) p は $0 < p < 1$ を満たす定数とする. 0 以上の整数に値をもつ確率変数 X を

$$P(X = r) = (1 - p)^r p, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

により定義する.

(a) s を非負の整数とするとき, $P(X \geq s)$ を求めよ.

(b) s, t を非負の整数とするとき, 条件付確率 $P(X \geq s + t | X \geq s)$ を求めよ.

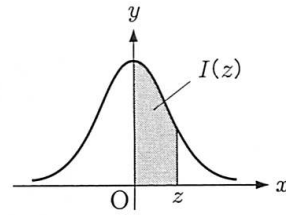
(c) X の期待値を求めよ.

(2) (a) すべての目が等確率 $\frac{1}{6}$ が出るサイコロを 720 回振ったときの 6 の出る回数を S とするとき, $110 \leq S \leq 125$ の確率 $P(110 \leq S \leq 125)$ を中心極限定理 (ド・モワブル-ラプラスの定理) を用いて求めよ.

(b) あるサイコロを 720 回振ったところ, 6 が 135 回出た. このサイコロは 6 が出やすいと言ってよいか. 危険率 5% で検定せよ.

付表2 正規分布表I

$$z \rightarrow I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986