2018年度実力テスト(専門物理問題)

2019年1月17日(木)

12:50～14:50　120分

解答上の注意

- 問題は全部で7題ある。
  最初の3題、電磁気学、量子力学Ｉ、統計力学Ｉは必ず解答すること。
  残り4題は選択問題である。うち2問を選択し解答すること。

- すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

- 答案は解答用紙の授業科目の欄に受験科目の該当項目に○をつけ、選択した問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

- 解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

- 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出の上、退室を認める。

専門物理問題 第1問　電磁気学

1. 無限に広い yz 平面（$x=0$）に一様に電荷（面電荷密度 σ）が分布している。
   (1) この面電荷がつくる電場を積分型のガウスの法則を用いて求めよ。
   (2) 静電ポテンシャルの大きさを求めよ。$x=0$ を基準点とする。

2. 無限に広い yz 平面（$x=0$）上の導体に、y 軸の正方向に一様な電流（面電流密度 i）が流れている。ただし面電流密度は単位長さあたりの電流を表す。
   (1) この面電流がつくる磁場の向きと磁束密度の大きさを積分型のアンペールの法則を用いて求めよ。
   (2) ベクトルポテンシャルの向きと大きさを求めよ。$x=0$ を基準点とする。

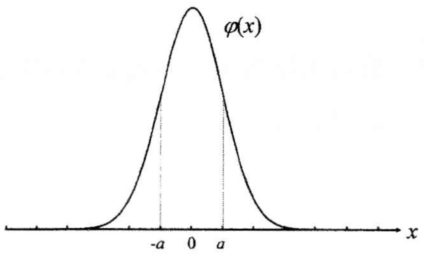
3. 2 の面電流を時間変化させた場合（面電流密度 $i(t)=i_0\cos(\omega t)$）に、yz 平面の外側で起きる現象をできるだけ詳しく記述せよ。

専門物理問題　第2問　　量子力学 I

問１．区間 $-L/2 \le x \le L/2$ に１個の粒子が存在する場合を考える。粒子の波動関数が

$$\varphi(x) = N \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)$$

であらわされるものとする。ここで $N(>0)$、$a(>0)$ は定数とする。定数 a は長さの次元を持ち、$L \gg a$ が成り立つものとする。$\varphi(x)$ を下図に示す。



また、$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{1}{L}}\exp(ikx)$ として、$\varphi(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x)$ と展開すると、展開係数 c_k は

$$c_k \propto \exp\left(-\frac{1}{2}a^2k^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{k^2}{(1/a^2)}\right)$$

と表される。これを用いて、以下の問に答えよ。

1. 粒子の存在確率密度関数 $w(x)$ を求めよ。また、それを図示せよ。
2. 定数 N を求めるための条件式を示せ。そのような条件式が成り立つ理由についても説明せよ。　（N の値を求める必要はない）
3. この状態について粒子の位置を観測したときに、どのような測定値が得られるか説明せよ。図を用いても良い。
4. この状態について粒子の位置の平均値および位置の不確定性について述べよ。
5. この状態について粒子の運動量を観測したときに、どのような測定値が得られるか、図を用いて説明せよ。
6. この状態について粒子の運動量の平均値および運動量の不確定性について述べよ。

問２．問１の結果を用いて、不確定性原理を説明せよ。

専門物理問題 第3問　統計力学 I

個々の原子が三つの離散的なエネルギー準位 $-\epsilon,\ 0,\ \epsilon$ を持つ原子集団の熱・統計力学的性質を考える。系内には N 個の原子があり、原子間の相互作用は無視できるとする。系は温度 T の熱浴に接しているとして、以下の問いに答えよ。ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_B T$ とする。解答では、T と β は混在していてもよいものとする。

問 1. この系の分配関数を求めよ。

問 2. この系のヘルムホルツ自由エネルギーを求めよ。

問 3. この系の内部エネルギー（エネルギーの期待値）を求めよ。

問 4. この系のエントロピーを求めよ。

問 5. 高温 $(T \to \infty)$ 極限で内部エネルギー、エントロピーはそれぞれ一定値に近づく。その極限値を求めよ。

問 6. 低温 $(T \to 0)$ の極限で、内部エネルギー、エントロピーはそれぞれ一定値に近づく。その極限値を求めよ。

問 7. 問 5 で得たエントロピーの高温での極限値について、エントロピーについてのボルツマンの公式と関連付けて考察せよ。

専門物理問題 第4問　　量子力学II

質量 m, 角振動数 ω の一次元調和振動子を考える。

1. この系のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ を変位の演算子 $\hat{x}$、運動量の演算子 $\hat{p}$ を用いて記せ。
2. 演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ は次の交換関係を満たす。

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar.$$

ここで、$\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ を次のように定義する。

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m}}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m}}\hat{p}\right).$$

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

(b) ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ を $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ を用いて表せ。

(c) $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態の波動関数 $\phi_n(x)$ は、$\hat{a}^\dagger\hat{a}\phi_n(x) = n\phi_n(x)$ を満たす。このとき、

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\phi_n(x) = (n+1)\hat{a}^\dagger\phi_n(x) \qquad .$$

となることを示せ。

3. この系の基底状態の波動関数 $\phi_0(x)$ は、$\hat{a}\phi_0(x) = 0$ を満たす。

(a) 基底状態のエネルギーを求めよ。

(b) 基底状態の波動関数 $\phi_0(x)$ を求めよ。規格化定数を N とする。但し、演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ は波動関数 $\phi_0(x)$ に作用するとき次のように表される。

$$\hat{x} = x, \qquad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

専門物理問題　第5問　　　固体物理

1.　２原子分子からなる一次元結晶格子の調和振動子モデルを考える。格子定数を a、原子の質量を M、分子内のばね定数および分子間のばね定数を各々 K_1, K_2 $(K_1 > K_2)$ とし、n 番目の分子のうち、左側の原子が平衡位置からずれるときの変位を $u_1(na)$ とし、右側の原子が平衡位置からずれるときの変位を $u_2(na)$ として、以下の問いに答えよ。

（１）　n 番目の分子の各原子の変位に対する運動方程式が次式で与えられるものとする。

$$\begin{cases} M\ddot{u}_1(na) = -K_1[u_1(na) - u_2(na)] - K_2[u_1(na) - u_2([n-1]a)] \\ M\ddot{u}_2(na) = -K_1[u_2(na) - u_1(na)] - K_2[u_2(na) - u_1([n+1]a)] \end{cases}$$

この運動方程式の解として、各原子の振動が結晶全体を伝播する格子振動が次式で表されるとして、格子振動の分散関係 $\omega(k)$ を求めよ。

$$u_1(na) = A\exp[i(kna - \omega t)]\,, u_2(na) = B\exp[i(kna - \omega t)]$$

（２）　（１）で求めた分散関係 $\omega(k)$ を第１ブリルアン・ゾーンの範囲内で図示せよ。ただし、音響モードと光学モードの区別も図示すること。

（３）　格子振動の振幅比 $(|u_2/u_1| \equiv B/A)$ を求め、長波長領域 $(0 < k \ll \pi/a)$ における振幅比の符号から音響モードと光学モードの分子内振動の違いを説明せよ。

（４）　一次元結晶格子の調和振動子モデルを量子論で扱うと、単位体積当たりの内部エネルギーとして次式が得られる（体積を V とする）。

$$u = \sum_k \frac{\hbar\omega(k)}{V}\left[\frac{1}{2} + n(k)\right], \qquad n(k) = \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega(k)}{k_B T}\right] - 1}$$

この場合、低温極限（$k_B T \ll 1$）の格子比熱$\left(c \equiv \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_V\right)$に寄与するのは、音響モードと光学モードのどちらか、理由と共に説明せよ。ただし、各モードの分散関係 $\omega(k)$ を適切に近似し、計算を簡略化してもよい。

2.　固体結晶中を運動するブロッホ電子の速度と運動方程式が次式で与えられる時、以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E_n(\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{k}}, \qquad \hbar\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

ここで、$\boldsymbol{k}$ はブロッホ電子の結晶運動量、$E_n(\boldsymbol{k})$ は n 番目のエネルギーバンド、$\boldsymbol{F}$ はブロッホ電子にはたらく外力を表す。

（１）　古典論の運動方程式（$d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{F}/m$）と比べることにより、ブロッホ電子の有効質量（バンド有効質量）を求めよ。また、$E_n(\boldsymbol{k}) = E_0 - W(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a)$ の場合のバンド有効質量からエネルギーバンド幅 $2W$ とバンド有効質量の関係を示せ。

（２）　ブロッホ電子の波動関数（ブロッホ関数）の一般形を示し、固体結晶の周期ポテンシャル中を運動する電子（ブロッホ電子）の特徴を簡潔に説明せよ。

専門物理問題　第6問　　　相対論＋原子核物理／場と粒子

問 1. 水素原子において n_2 という主量子数の状態から n_1 という主量子数の状態へ遷移 ($n_2 > n_1$) するときに放射される光子のエネルギーは

$$E = 13.61\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) [\mathrm{eV}]$$

で表される。(1) 水素原子の電離エネルギーは何 eV になるか。(2) ライマン α 線の光子のエネルギーは何 eV になるか。また、その波長は何 Å か。(3) バルマー β 線の光子のエネルギーは何 eV になるか。また、その波長は何 Å か。ここで、真空中の光速 $\mathrm{c} = 2.9979 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で、プランク定数 $\mathrm{h} = 6.6261 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$、$1\ \mathrm{eV} = 1.60022 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$ である。エネルギーは少数第 2 位で、また、波長は整数値で答えよ。

問 2. 放射性原子核が崩壊して他の原子核になるとき、時刻 t での原子核の数を N とすれば $dN/dt = -\gamma N$ が成り立つ。γ は原子核の種類だけによって決まる定数で、これを崩壊定数という。$t = 0$ における N の値を N_0 としたとき、N が N_0 の半分になるまでの時間を半減期という。(1) 半減期を T として T と γ との間に成り立つ関係を導け。(2) $t = T/2$ のときの N/N_0 を求めよ。ただし、自然対数は、自然対数表示 (例えば $\ln 2$) のままでよい。

問 3. 核分裂の一例として

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

を考える。1 個の $^{235}_{92}\mathrm{U}$ 原子核が上式により核分裂したとき、放出されるエネルギーは何 MeV か。ただし、各原子の質量は $^{235}_{92}\mathrm{U} = 235.0439\,\mathrm{u}$、$^{141}_{56}\mathrm{Ba} = 140.9139\,\mathrm{u}$、$^{92}_{36}\mathrm{Kr} = 91.8973\,\mathrm{u}$、$^{1}_{0}\mathrm{n} = 1.0087\,\mathrm{u}$ である。ここで、u は原子質量単位であり、$1\,\mathrm{u} = 1.66054 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$、真空中の光速 $\mathrm{c} = 2.9979 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$1\ \mathrm{eV} = 1.60022 \times 10^{-19}$ J である。

専門物理問題 第7問　　電気・電子回路

[1] 真空中において、図 1 の様に z 軸方向に沿って間隔 l_x で平行に並べられた幅 l_y の 2 枚の完全導体板から成る非常に長い伝送路を電磁波（電気信号）が伝播している。この時、電磁波の電場（の x 成分） $E_x(z,t)$ 及び磁場（の y 成分） $H_y(z,t)$ は、それぞれ x 軸及び y 軸方向に角周波数 ω で振動しながら次の伝送方程式

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

に従って z 方向に進むものとする。ただし、導体板の間には断面が $l_x \times l_y$ の誘電体がすきま無く挟まれており、誘電体の誘電率及び透磁率はそれぞれ ε 及び μ である。以下の問に答えよ。

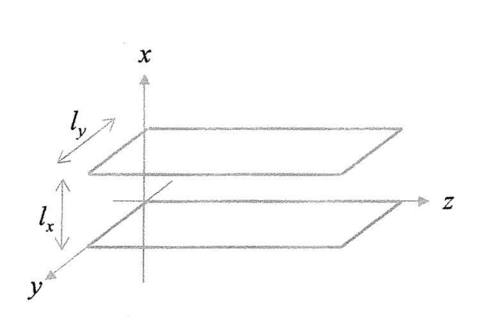


図 1　z 軸に沿って並行に置かれた 2 枚の完全導体板から成る非常に長い伝送路の一部。 導体板間には断面が $l_x \times l_y$ の誘電体が挟まれている

(1-1) 本誘電体の特性インピーダンスをこれまで問題文に表れた変数を用いて最も簡単な式で表せ。

(1-2) この伝送路を伝わる電磁波の位相速度の大きさ V をこれまで問題文に表れた変数を用いて最も簡単な式で表せ。

(1-3) この伝送路を伝播する電圧信号 $v(z,t)$ 電流信号 $i(z,t)$ を問題文中の変数を用いて最も簡単な式で表せ。

(1-4) 問 (1-3) より、$\frac{\partial v}{\partial z} = -\boxed{\text{(a)}}\frac{\partial i}{\partial t}$ 及び $\frac{\partial i}{\partial z} = -\boxed{\text{(b)}}\frac{\partial v}{\partial t}$ の各式の空欄 (a) 及び空欄 (b) に当てはまる式を考察し、それらをこれまで問題文に表れた変数を用いて書き下せ。

(1-5) 問 (1-4) の空欄 (a) 及び (b) に当てはまる式は、それぞれ伝送路の単位長さ当たりのインダクタンス L 及びキャパシタンス C に相当する。そこで、この伝送路を伝わる信号（電磁波）の伝搬速度の大きさ V を、本問では L と C を用いて式で表せ。

[2] まず、図 2(a) の様な帰還回路を考える。開ループ利得は A、帰還率は h、入力電圧信号を v_s 、出力電圧信号を v_o とし、v_i および v_f はそれぞれ図中の点 P 及び点 Q での電圧とする。

(2-1) 開ループ利得 A を v_s, v_i, v_o, v_f の中のいずれかを用いて最も簡単な式で表せ。

(2-2) 帰還率 h を v_s, v_i, v_o, v_f の中のいずれかを用いて最も簡単な式で表せ。

(2-3) 閉ループ利得 A_f とする。A_f を v_s, v_i, v_o, v_f のいずれも用いず問題中の変数を用いて最も適切に式で表せ。

さて、図 2 (b) は理想的なオペアンプに負帰還をかけた（ボルテージフォロワと呼ばれる）回路である。非反転入力側には電圧信号 v_i を入力し、出力電圧信号は v_o で与えられる。

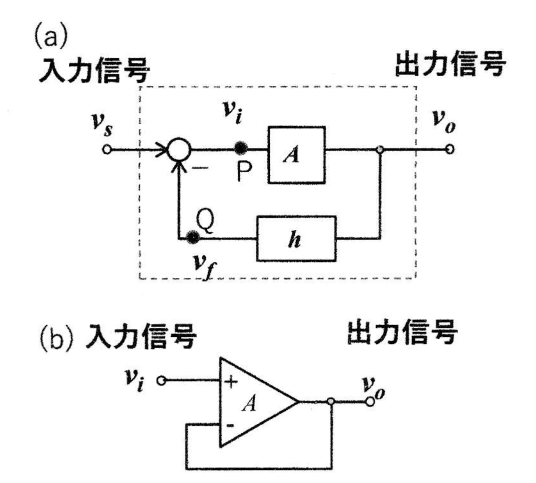


図 2 (a) 負帰還回路と (b) オペアンプ回路（ボルテージフォロワ）

(2-4) この回路の帰還率を最も適切な数値で表せ。

(2-5) この回路の閉ループ利得を最も適切な数値で表せ。