2018年度　実力テスト
専門問題（数学）

2019 年 1 月 17 日（木）
12 : 50 〜 14 : 50 (120 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 9 題ある．そのうち 4 題 を選択して答えよ．
- 各問題ごとに解答用紙 1 枚を使用し，選択した問題番号を所定の欄に明記すること．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，解答用紙はすべて提出すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 試験開始から 30 分経過した後は，解答用紙を提出の上，退出を認める．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$ の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\cos t$$

の特解を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問に答えよ．

(1) フェルマーの小定理を用いて，81^{119} を 13 で割った余りを求めよ．

(2) 自然数 n に対し，$\varphi(n)$ をオイラー関数，すなわち

$$\varphi(n) := \#\{a\in\mathbb{N} \mid 1\le a\le n,\ \gcd(a,n)=1\}$$

とする．$\varphi(n)=4$ となる自然数 n をすべて求めよ．

(3) 群準同型写像 $f:G\to G'$ の核 $\mathrm{Ker}\,f$ は，G の正規部分群であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ a,b に収束するとき，数列 $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a+b$ に収束することを示せ．

(2) 調和級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

が収束するかどうか判定せよ．証明も述べること．

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2+2n}$ が収束するかどうか判定せよ．

4 以下の問に答えよ．ただし，$\mathbb{N}$ は自然数 $1, 2, 3, \ldots$ 全体からなる集合を表す．

(1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の 2 項関係 R を

$$(m, n)\, R\, (m', n') \quad \underset{\text{定義}}{\iff} \quad m + n' = n + m', \qquad (m, n), (m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

により定義するとき，R は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係になることを示せ．

(2) 開区間 $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に対して，$I \times I$ 上の関数 d を

$$d(x, y) := |\sin x - \sin y|, \qquad x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

により定義するとき，d は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の距離関数になることを示せ．

(3) 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 1\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合でないことを示せ．

5 $z = e^{i\theta}$ とし，$f(\theta) = \dfrac{1}{4 + 2\cos\theta + i\sin\theta}$ とする．

(1) $\cos\theta, \sin\theta$ を z を用いて表せ．

(2) $f(\theta)$ を z を用いて表せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$ の値を求めよ．

6 以下の問に答えよ．ただし，m は 1 次元 Lebesgue 測度を表す．

(1) Lebesgue の収束定理とはどのような定理であるか説明せよ．

(2) 次を満たす $\mathbb{R}$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ の具体例を挙げよ．

$$\{f_n\} \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上で各点収束するが，} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm.$$

(3) $\mathbb{R}$ 上の Borel 可測関数列 $\{f_n\}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n} \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad (n \geq 1)$$

により定義する．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm$ が存在するかどうか調べよ．また，極限が存在する場合はその値を求めよ．

7　$\mathbb{R}^2$ 上のラプラス作用素 (演算子) Δ は，通常の xy-座標では $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ によって与えられ，極座標 (r, θ) のもとでは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

となる．

(1) r の関数 $f(r)$，θ の関数 $g(\theta)$ に対して $u(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ が $\Delta u = 0$ を満たすとき，

$$\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $u(r,\theta)$ が r のみの関数で $\Delta u = 0$ を満たし，

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = 2, \qquad u(1,\theta) = 1$$

を満たすとき，u を求めよ．

8　実数パラメータ u, v により表される曲面

$$\begin{cases} x &= v - v^3 \\ y &= u - u v^2 \\ z &= 3v^2 + u^2 v^2 - 3u^2 - u^4 \end{cases}$$

について，$(u,v) = (1,0)$ におけるガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ．

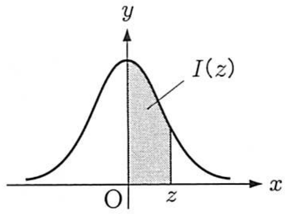
9　以下の各問に，必要なら次ページの正規分布表を用いて答えよ．

(1) n を自然数，p を $0 < p < 1$ をみたす実数とし，S_n を二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数とするとき，S_n に対するド・モワブル-ラプラスの定理 (中心極限定理) を述べよ．

(2) あるテレビ番組の視聴率を 500 世帯を対象に調査したところ，25% であったという．この番組の視聴率の信頼度 90%，95% の信頼区間を求めよ．ただし，$\sqrt{15} = 3.872$ として計算せよ．

(3) 二項母集団の母比率 p の区間推定を行う際，信頼度 95% の信頼区間の幅を 2% より小さくするには標本はどの程度必要になるか．また，信頼度を 90% にした場合はどうか．ただし，$0 \leqq p \leqq 1$ のとき $0 \leqq p(1-p) \leqq \dfrac{1}{4}$ が成り立つことを用いること．

付表２　正規分布表Ｉ



$$z \to I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986