2018年度　実力テスト
基礎問題（コース共通）

2019 年 1 月 17 日（木）
11 : 00 〜 12 : 00 (60 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 3 題ある．全ての問題に解答すること．
- 各問題ごとに解答用紙 1 枚を使用し，解答した問題番号を所定の欄に明記すること．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，解答用紙は 3 枚とも提出すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 途中退出は不可とする．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問に答えよ．

(1) 座標平面の原点を中心とする半径 a の円を D とするとき，つぎの積分を求めよ．

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

(2) 次の関数の極値を求めよ．

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

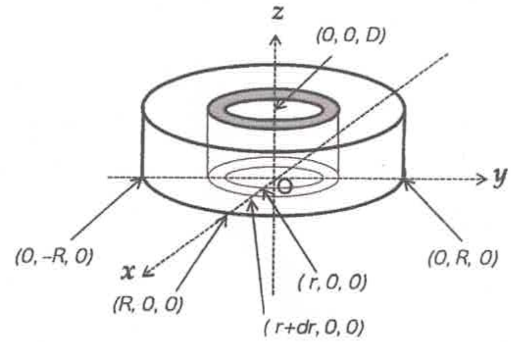
$\boxed{\mathbf{2}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 2a \\ 0 & 3-a & 0 \\ a & a & 3+a \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ について，以下の問に答えよ．

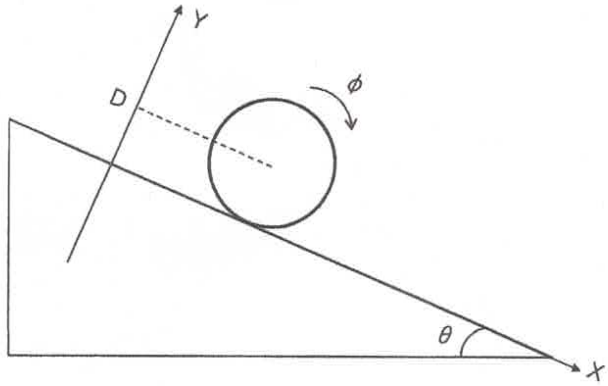
(1) 行列 A が逆行列を持つための a の条件を求めよ．

(2) A は対角化可能かどうか調べよ．対角化可能な場合は対角化せよ．

3

(Ⅰ) 地上に右上図のような剛体円柱がある。
円柱の外形は、上面と下面が平行な半径 R の円形の平面で、上面・下面と垂直の関係にある高さ D の側面で構成される。図のように上面・下面の円の中心を通るように z 軸をとり、x-y-z 直交座標系を導入する。z 軸からの距離を r とすると、円柱の密度は r によって変化し、$\rho(r) = kr$ と表される。ここで k は正の実定数である。また、以下では地上での重力加速度の大きさを g とする。





(1) 円柱の質量中心（重心）G の座標を図の座標系に基づいて示せ。(答のみでよい。)
(2) 図で円柱上面に影をつけた z 軸からの距離が $r \sim (r+dr)$ の薄い円筒の z 軸（円柱の回転軸とする）まわりの慣性モーメントはいくらか。(dr は微小量である。)
(3) 上の考察をもとに、円柱の全質量 M と z 軸まわりの慣性モーメント I_z を求めよ。
(4) 右下図のように水平面からの傾斜角が θ の斜面上を、この円柱が上記 z 軸を回転軸として、滑ることなく転がり落ちる。回転角を $\phi(t)$ とし、円柱に働く斜面からの摩擦力の大きさを F とおく。円柱の回転軸まわりの角運動量の変化率を表す式を、I_z、$\phi(t)$ および F を用いて答えよ。
(5) 右下図のように X-Y 軸をとり、G の X 座標を $X_G(t)$ とすると、G の X 方向の加速度 $\ddot{X}_G(t)$ はどのように表されるか。答には M、I_z を用いて良い。

(Ⅱ) 空間内の定点 O に質量 M の天体が静止しているとする。このとき、O を原点とする 3 次元直交座標系（右手系）x-y-z を導入し、O から測った空間の点 (x, y, z) の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^t$ とする。(ここで上付きの添字 ^{t} は転置行列をあらわす。すなわち $\boldsymbol{r}$ は縦ベクトル。) 重力定数（万有引力定数）を G とする。また以下では、上記天体以外の天体の寄与は無視でき、天体は質点とみなしてよいとする。

(1) 質量 m の宇宙船（質点とみなせる）が、時刻 t において、位置 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$ にあるとき、慣性飛行をする宇宙船の運動方程式をもとめよ。
(2) 慣性飛行をしている宇宙船の O に関する角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ が保存することを示せ。
(3) 位置 $\mathrm{P}(L, 0, d)^t$ における宇宙船の速度が $\boldsymbol{v} = (-v_0, 0, 0)^t$ であった。(ただし、$v_0 > 0$ は真空中の光速度の大きさより十分小さい。) ここで、L は十分に大きく、$L \gg d \gg$ 天体の半径（0 とみなせる）であり、P は O に対して無限遠と考えてよい。このとき、宇宙船の O に関する角運動量の大きさはいくらか。
(4) P を通過後、宇宙船はエンジンを停止したまま慣性飛行を続け天体に接近した。宇宙船が天体に最接近した時の O との距離を s とする。この時の宇宙船の速さを求めよ。なお、s は天体の半径（0 とみなせる）より十分に大きく、天体の大気等の影響はなく、一般相対性理論的考察も必要ないとする。
(5) 上記の最接近点において、宇宙船はガスを逆噴射し、速度の向きは変えないまま速さ v_1 まで減速した。宇宙船が天体の周回軌道に入るための v_1 の条件を求めよ。なお、噴射したガスの質量は無視できる。