# 2017年度実力テスト（専門物理問題）

2018年1月12日（金）

12：50～14：50　120分

## 解答上の注意

・　問題は全部で7題ある。
　最初の3題、電磁気学、量子力学Ｉ、統計力学Ｉは必ず解答すること。
　残り4題は選択問題である。うち2問を選択し解答すること。

・ すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・ 答案は解答用紙の授業科目の欄に受験科目の該当項目に〇をつけ、選択した問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

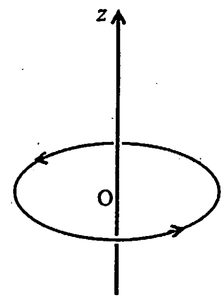
・ 解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

・ 試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出の上、退室を認める。

1. 原点を中心とした半径 $a$ の円形回路が $xy$ 平面上におかれている。
右図のように、円形回路に反時計回りに電流 $I$ が流れているとき、$z$ 軸上での磁束密度の向きと大きさ $B(z)$を、ビオ・サバールの法則を用いて求めよ。なおビオ・サバールの法則は

$$d\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{\vec{t}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}ds=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{d\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

のように表される。




2. 単位長さ当たりの巻き数が $n$ で半径 $a$ の無限に長いソレノイドに電流 $I$ が流れているとする。ソレノイドの中心軸上の磁束密度の大きさを、1 の結果を用いて求めよ。

3. 2 のソレノイドの外側の磁束密度の大きさを、積分形のアンペールの法則を用いて求めよ。

4. 次に単位長さ当たりの巻き数 $n$、半径 $a$ で、有限の長さ $l$ のソレノイドを考える。ソレノイドに流れる電流が $I(t)=I_0\cdot t$ のように時間変化するとき、ソレノイドに発生する誘導起電力の大きさを求めよ。

# 専門物理 量子力学 I

質量 $m$ の粒子が, 一次元ポテンシャル $V(x)$ 中を運動する。以下の問に答えよ。解答は解答用紙に途中の論理、計算も含めて明確に記すこと。

1. 定常状態の波動関数を $\psi(x)$ とする。定常状態のシュレディンガー方程式を記せ。
2. $V(x)$ は次の形とする。

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \le -a/2 \\ 0, & -a/2 < x < a/2 \\ \infty, & a/2 \le x \end{cases}$$

ここで、$a > 0$ である。

(a) 波動関数 $\psi(x)$ が $x = \pm a/2$ で満たさなければならない境界条件を記せ。

(b) 最も低いエネルギー固有状態の規格化された波動関数 $\phi_1(x)$ とそのエネルギー $E_1$ を求めよ。

(c) $\phi_1(x)$ で表される状態において粒子の座標 $x$ および運動量 $p$ の期待値を求めよ。

(d) $\phi_1(x)$ で運動量を観測したときに得られる可能性のある観測値と、それらが得られる確率を求めよ。

(e) ２番目にエネルギーの低い固有状態の波動関数 $\phi_2(x)$ とそのエネルギー $E_2$ を求めよ。

3. (a) ハミルトニアンを $\hat{\mathcal{H}}$、時間に依存した波動関数を $\psi(x,t)$ とする。時間に依存したシュレディンガー方程式を記せ。

(b) 時刻 $t = 0$ で $\psi(x, t = 0) = \phi_1(x)$ とする。時刻 $t$ での規格化された波動関数 $\psi(x,t)$ を記せ。

(c) 時刻 $t = 0$ で $\psi(x, t = 0) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ とする。ここで複素定数 $c_1, c_2$ は $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ を満たすものとする。時刻 $t$ での波動関数 $\psi(x,t)$ と、その状態でのエネルギーの期待値を求めよ。

## 専門物理 III (統計力学 I)

体積 $V_0$ の容器の中に $N_0$ 個の気体粒子が入っている。この一部分の領域をとり、その体積を $v$ とし、その中にある気体粒子の数を $n$ とする。ひとつの気体粒子が $v$ の領域の中に見出される確率は $\dfrac{v}{V_0}$ であるとする。以下の問に答えよ。

1. $n$ の確率分布 $f(n)$ を求めよ。

2. $n$ の平均値 $\langle n \rangle$ と、分散 $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。必要ならば以下の二項定理を用いよ。

$$\sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{(k-\ell)!\,\ell!}\, a^{k-\ell}\, b^{\ell} = (a+b)^k$$

3. $N_0$, $n$, $N_0 - n$ が大きい場合、Stirling の公式

$$\begin{aligned} \log N_0! &= N_0 \log N_0 - N_0 \quad , \\ \log n! &= n \log n - n \quad , \\ \log (N_0 - n)! &= (N_0 - n) \log (N_0 - n) - (N_0 - n) \quad , \end{aligned} \tag{1}$$

を用いて、$\log f(n)$ を最大にする $n$ の値 $n_m$ をもとめよ。

4. (i) $\log f(n)$ を $n = n_m$ のまわりで展開し、$f(n)$ が次の形で与えられるガウス分布 (正規分布) で近似できることを示せ。

$$f(n) \propto \exp\left[ -\frac{(n-n_m)^2}{2\sigma^2} \right] \quad .$$

また、分散 $\sigma^2$ を求めよ。
(ii) 2. で求めた $\langle n \rangle$ および $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ を $n_m$ および $\sigma^2$ と比較するとどうなるか。

# 量子力学 II

**問１.** スピン演算子 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ はパウリ行列を用いて $\hat{S}_\alpha = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_\alpha$ $(\alpha = x, y, z)$ であらわされる。ただし、$\hat{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma_y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

1-1) スピン演算子 $\hat{S}^2 = \hat{S_x}^2 + \hat{S_y}^2 + \hat{S_z}^2$ を、行列を用いてあらわせ。

1-2) 交換積 $[\hat{S}_z, \hat{S}_x]$、$[\hat{S}_z, \hat{S}^2]$ を計算せよ。

1-3) $\hat{S}_x$ の固有値をすべて求めよ。

1-4) $\hat{S}_x$ の固有値の中で値が最も大きいものについて、それに対応する固有ベクトル（固有スピノル）を $\chi$ とする。$\chi$ を求めよ。

1-5) 上で求めた $\chi$ が、$\hat{S}_z$、$\hat{S}^2$ の固有ベクトルかどうかを、それぞれ計算して確認せよ。

1-6) 上で求めた $\chi$ が表す固有状態を考える。この状態における $\hat{S}_z$、$\hat{S}^2$ を観測すると、それぞれどのような結果が得られるかを記せ。

**問２.** スピンに関する不確定性原理を説明せよ。問 1 の結果を用いても良い。

専門５　固体物理

1. 金属中の自由電子の運動に基づいて金属物性を説明する古典論（ドゥルーデ理論）と量子論（ゾンマーフェルト理論）に関する以下の問いに答えよ。ただし、自由電子の質量を $m$、電荷を $e(<0)$、電子密度を $n$、平均の散乱時間を $\tau$、エネルギー $\varepsilon \sim \varepsilon + d\varepsilon$ に占める量子状態の状態密度を $D(\varepsilon)$ とする。

（１） 以下の事項のうち、古典論の枠内で内容を正しく説明できるものの記号をすべて答えよ。また、古典論の枠内で正しく説明できない事項については、その理由を簡潔に説明せよ。

（ア） 直流電気伝導度の表式（$\sigma = ne^2\tau/m$）

（イ） 電子比熱の表式（$c_{el} = (\pi^2/3)D(E_F)k_B{}^2T$）

（ウ） 電気伝導度 $\sigma$ と熱伝導度 $\kappa$ に関するウィーデマン・フランツ則（$\kappa/\sigma T = $一定）

（エ） 自由電子の平均速度の大きさと温度変化

（オ） 磁気抵抗効果の有無

（２） 金属中の交流電気伝導度 $\sigma(\omega)$ と複素誘電率 $\varepsilon(\omega)$ が、各々、$\sigma(\omega) = (ne^2\tau/m)/(1 - i\omega\tau)$ と $\varepsilon(\omega) = 1 - \sigma(\omega)/i\omega\varepsilon_0$ （$\varepsilon_0$ は真空の誘電率）で与えられることを用いて、$\omega\tau >> 1$ の場合、複素誘電率の周波数依存性が $\varepsilon(\omega) \approx 1 - (\omega_p/\omega)^2$ となることを導き、その周波数依存性を図示せよ。ただし、$\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$ である。

（３） 量子論の場合、基底状態では金属中の自由電子は $k$ 空間内の半径 $k_F$ で与えられるフェルミ球内のすべての状態が占有されると考える。この時、3次元系自由電子のフェルミ波数 $k_F$ と電子密度 $n$ との関係を導け。

（４） 量子論において、系の体積を $V$ とし、$0 < \varepsilon\left(= \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) < E$ を満たす電子数を $N(E) = V\int_0^E D(\varepsilon)d\varepsilon$ とする場合、3次元系自由電子の状態密度が $D(E) \propto \sqrt{E}$ となることを導け。

2. 以下の文章を読み、以下の問いに答えよ。

分子内で形成される分子軌道は、各原子内で形成される電子軌道が互いに接近することにより結合軌道と反結合軌道に分裂し、隣り合う２原子から電子が１つずつ、よりエネルギーの低い結合軌道を占有することによって安定化する。固体中の電子状態は、結晶化に伴う原子間距離の接近により、このようなエネルギー準位分裂を非常に多く繰り返す結果、有限のエネルギー幅を持つ占有状態と非占有状態の繰り返し構造（エネルギーバンド構造）を示す。

（１） 上の文章の説明に基づき、エネルギーバンド図を用いて固体結晶における金属と絶縁体の違いを説明せよ。

（２） シリコン（Si, $3s^2 3p^2$）結晶が、金属ではなく真性半導体となる理由を定性的に説明せよ。

問 1. (1) ボーアの原子模型から電子の軌道半径 $r = \dfrac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2} n^2$ を導出せよ。ここで、$\epsilon_0$ は真空の誘電率、$h$ はプランク定数、$m_e$ は電子質量、$Ze$ は原子核の電荷、$e$ は素電荷、$n$ は整数 (n=1,2,3,...) である。(2) 定常状態のエネルギーの差が光子として放射されると仮定すると、軌道電子が準位 $n_2$ から $n_1$ に遷移する時 (ただし、$n_2 > n_1$) に放出する光子のエネルギーを与える式を示せ。

問 2. $^{A}_{Z}\mathrm{X}$ という原子核が $\alpha$ 崩壊、$\beta^-$ 崩壊、$\beta^+$ 崩壊、$\gamma$ 崩壊する時の核反応式はそれぞれどのように表されるか。

問 3. ウラン 235 の原子核 ($^{235}_{92}\mathrm{U}$) の質量は 235.0439 u である。この原子核の核子 1 個あたりの結合エネルギーは何 MeV になるか。有効数字 2 桁で答えよ。ここで、u は原子質量単位であり、陽子の質量は 1.0073 u、中性子の質量は 1.0087 u、$1\,\mathrm{u} = 1.6605 \times 10^{-27}$ kg、光速 $\mathrm{c} = 2.9979 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$1\ \mathrm{eV} = 1.6002 \times 10^{-19}$ J である。

## 専門7 電気・電子回路

[１] 電気容量が $C$ のコンデンサーと抵抗値 $R$ の抵抗を直列につないだ図 1(a) の様な RC 回路に、図 1(b) の様な $v_i = V\ (>0)\quad (t \le 0),\quad v_i = 0\ (t > 0)$ である入力電圧 $v_i$ が印加された。

(1-1) $t > 0$ の時に、図のループ ABFE に成り立つキルヒホッフの第 2 法則（電圧法則）を表す式を、コンデンサーに蓄えられる電気量 $q(t)$ 及び図中の変数を用いて書き下せ。

(1-2) 問 (1-1) の式を電気量 $q(t)$ に関する時間微分方程式として書き直せ。

(1-3) 電気量 $q(t)$ が従う（$t = 0$ での）初期条件を式で表せ。

(1-4) 問 (1-2) の式と問 (1-3) の結果を用いて、電気量 $q(t)$ を最も適切な式で表せ。

(1-5) 問 (1-4) の結果を用いて $t > 0$ の時に回路を流れる電流 $i(t)$ を表す式を書け。また、$t > 0$ の時の出力電圧 $v_o(t)$ を時間に対してプロットせよ（図で表せ）。

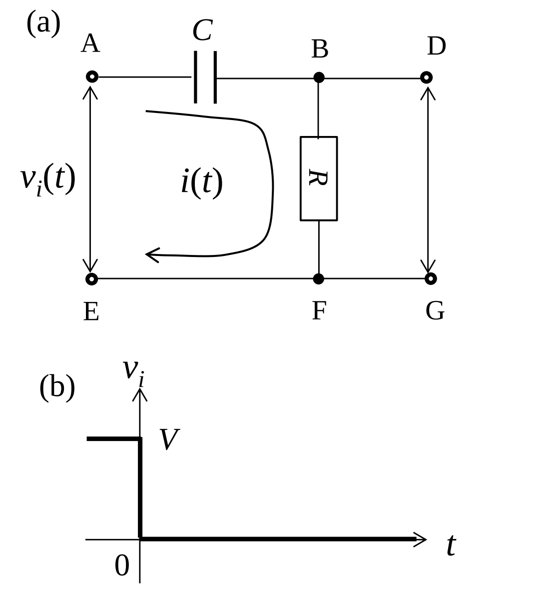


図 1 (a) RC 回路と (b) その入力電圧 $v_i(t)$

[２] 図 2 はエミッタ接地バイポーラトランジスタに、電圧が $v_s$ で出力インピーダンスが $R_s$ である信号源が接続され、出力側にはインピーダンス $R_L$ の負荷が接続されていることを表す、等価回路である。なお $h_i, h_r, h_f, h_o$ はエミッタ接地バイポーラトランジスタの $h$ パラメタの各要素であり、これを使うと次式:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_i \\ v_o \end{bmatrix} \quad (1)$$

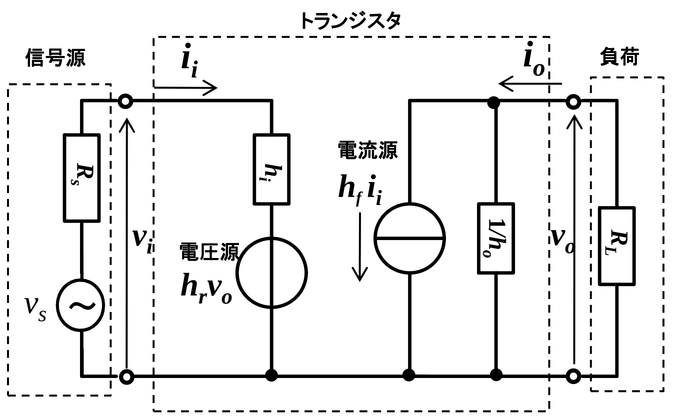


図 2　エミッタ接地バイポーラトランジスタの等価回路

が成り立つ。図中の $i_i, v_i, i_o, v_o$ はトランジスタの入力電流、入力電圧、出力電流、出力電圧であり、それぞれ矢印の方向に正の方向をとるものとして以下の問に答えよ。

(2-1) (1) 式から $v_i$ を $h$ パラメタを用いて式で表せ。

(2-2) (1) 式から $i_o$ を $h$ パラメタを用いて式で表せ。

(2-3) $v_o$ を必ず $R_L$ を用いて式で表せ。

(2-4) 問 (2-1)~(2-3) の結果に基づき、$v_i$ を必ず $R_L$ 及び4つの $h$ パラメタを用いて式で表せ。

(2-5) 問 (2-1)~(2-4) の結果に基づき、トランジスタの入力抵抗を必ず $R_L$ 及び 4 つの $h$ パラメタを用いて式で表せ。