

2017年度 実力テスト

専門問題（数学）

2018年1月12日（金）
12:50～14:50（120分）

解答上の注意

- 問題は全部で9題ある。そのうち4題を選択して答えよ。
- 選択した各問題につき解答用紙1枚を使用すること。
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し、問題番号を必ず明記すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。ただしその旨を表面に明記すること。
- 解答用紙はすべて提出すること。
- 試験開始から30分経過した後は、解答用紙を提出の上、退出を認める。

1 次の全微分型方程式

$$(t^2 - 2tx^3)dt + 3t^2x^2dx = 0$$

について、次の間に答えよ。

- (1) 完全微分型でないことを示せ。
- (2) $\mu(t, x) = t^a x^b$ が積分因子となるような a, b を求めよ。
- (3) 一般解を求めよ。

2 次の間に答えよ。

- (1) 8^{900} を 23 で割った余りを求めよ。

(2) 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 4 \\ 3x + 6y + 4z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$$
 を \mathbb{F}_7 上で解け。

- (3) 0 でない複素数全体の集合を \mathbb{C}^\times で表す。写像

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad f(x) = e^{2\pi xi}$$

について、以下の間に答えよ。

- (a) f が加法群 \mathbb{R} から乗法群 \mathbb{C}^\times への準同型写像であることを確かめよ。
- (b) 準同型写像 f の核を求めよ。

3 次の間に答えよ。

- (1) a を実数の定数とする。
 - (a) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの定義を、 ε - δ 論法で述べよ。
 - (b) 二つの関数 $f(x), g(x)$ が共に $x = a$ で連続なら、その和 $f(x) + g(x)$ も $x = a$ で連続であることを、 ε - δ 論法を用いて証明せよ。
- (2) 次の広義積分が収束するか否かを、理由を述べた上で答えよ。

(a)
$$\int_5^\infty \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^3 - 3} dx$$

(b)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx$$

4 距離空間 (X, d) に対して, 次の問に答えよ.

- (1) X の任意の部分集合 A に対して, $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ が成り立つことを示せ. ただし, A°, \overline{A} はそれぞれ A の内部と閉包を表す.
- (2) 任意の点 $a \in X$ に対して, $\{a\}$ は X の閉集合であることを示せ.
- (3) X の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ のすべての要素 A_λ が X の開集合ならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も X の開集合であることを示せ.

5 複素積分を利用して, 定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3} - i \cos \theta}$$

を以下のようにして求めることを考える. ただし $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

- (1) 有理関数 $f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - \frac{i}{2}(z + \frac{1}{z})}$ のすべての極と, 極における留数を計算せよ.
- (2) 複素積分 $\int_{|z|=1} f(z) dz$ を計算せよ. ただし, 積分路は反時計回りに向きづけられているとする.
- (3) $z = e^{i\theta}$ のとき, $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ であることを利用して, 定積分 I を求めよ.

6 測度空間 (X, \mathcal{M}, μ) に対して, 次の問に答えよ.

- (1) \mathcal{M} が X 上の σ -加法族であることの定義を述べよ. また, σ -加法族の定義から次を示せ.

$$A_n \in \mathcal{M} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ ならば, } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

- (2) 関数 $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して, 次の (a) と (b) は同値であることを示せ.

(a) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{f > a\} \in \mathcal{M}$ (b) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{f \geq a\} \in \mathcal{M}$

- (3) 単調収束定理を述べよ. また, 非負 \mathcal{M} -可測関数列 $\{g_n\}$ に対して, 不等式

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$$

が成り立つことを, 単調収束定理を用いて示せ.

7 偏微分方程式の初期値・境界値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, \quad t > 0),$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \cos \pi x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\pi \cos \pi x \quad (0 < x < 1),$$

$$\text{境界条件} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \quad (t > 0)$$

を考える.

- (1) $u(x, t)$ を求めよ.
- (2) $\min_{0 \leq x \leq 1, t > 0} u(x, t)$ を求めよ. さらに, $u(x, t)$ がこの値を最初に達成する時刻 t を求めよ.

8 曲面 $z = \log \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}$ ($x \neq \pm 1$) の点 $(x, y, z) = (2, 0, \log \frac{1}{9})$ におけるガウス曲率 K と平均曲率 H をそれぞれ求めよ.

9 以下の各問に次ページの正規分布表を用いて答えよ.

- (1) 1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ であるサイコロを 180 回投げるときの 1の目が出る回数を S とするとき,

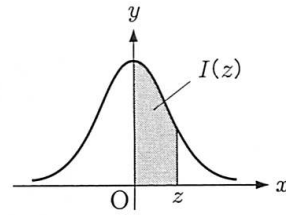
$$S \leq 25, \quad 26 \leq S \leq 35, \quad S \geq 36$$

の確率をド・モワブルの定理 (中心極限定理) を用いて求めよ.

- (2) 1の目が出る確率が不明のサイコロを 180 回投げたところ, 1の目が 42 回出た. 1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ といえるかどうかを検定したい.
 - (i) 検定する帰無仮説を書け.
 - (ii) 危険率 5%, および 1% で検定せよ.

附表2 正規分布表 I

$$z \rightarrow I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986