

# 2017年度 実力テスト

## 基礎問題（コース共通）

2018年1月12日（金）  
11:00～12:00（60分）

### 解答上の注意

- 問題は全部で3題ある。全ての問題に解答すること。
- 各問題につき解答用紙1枚を使用すること。
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し、問題番号を必ず明記すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。ただしその旨を表面に明記すること。
- 解答用紙はすべて提出すること。
- 途中退出は不可とする。

**1** 以下の問に答えよ.

- (1)  $a$  を正の定数とするとき, 体積が  $a^3$  の直方体のうちで表面積が最小の直方体は何か.
- (2) 次の積分の値を求めよ.

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \qquad (ii) \iint_{0 \leq x \leq y \leq 1} e^{y^2} dx dy$$

**2** 以下の問に答えよ.

- (1)  $\lambda$  が正方行列  $A$  の固有値であるとき,  $\lambda^{2018}$  は  $A^{2018}$  の固有値であることを示せ.

- (2) 行列  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & a & -a \end{pmatrix}$  の固有値を求めよ. ただし,  $a$  は定数とする.

- (3) (2) の行列が対角化不可能であるとき, 定数  $a$  の値を求めよ.

(I) 空間内に定点  $O$  があり、 $O$  を原点とする 3次元直交座標系 (右手系)  $x$ - $y$ - $z$  を導入する。 $O$  から測った空間の点  $(x, y, z)$  の位置ベクトルを  $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$  とする。(ここで上付きの添字  $t$  は転置行列をあらわす。すなわち  $\mathbf{r}$  は縦ベクトル。)  $O$  のまわりには、次式のポテンシャルで表現される力のある場がある。

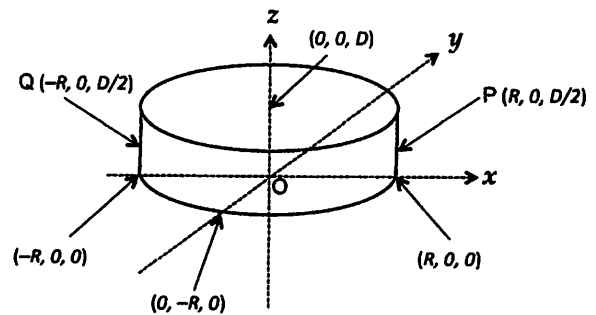
$$U(\mathbf{r}) = -\frac{a}{r} \exp(-\mu r)$$

ここで、 $r = |\mathbf{r}|$ 。また、 $a > 0$ 、 $\mu > 0$  は実定数である。この場と相互作用する質量  $m$  の粒子 (質点) を考える。

- (1) 質点が、時刻  $t$  において位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$  にあるとき、質点の運動方程式をもとめよ。
- (2) 位置  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^t$  から  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^t$  まで質点が運動した時、この場が質点に対してした仕事をもとめよ。
- (3) 質点の時刻  $t$  での速度を  $\mathbf{v}(t)$ 、位置を  $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$  とすると、この質点が上記の場に束縛されているための条件を答えよ。
- (5)  $O$  のまわりの質点の角運動量  $\ell$  が保存することを示せ。

(II) 形状の等しい 2 個の剛体円板  $a$  と  $b$  がある。

これらの円板の外形は、上面と下面が平行な半径  $R$  の円形の平面で、上面・下面と垂直の関係にある厚さ  $D$  の側面で構成される円柱形である。図のように上面・下面の円の中心を通るように  $z$  軸をとり、 $x$ - $y$ - $z$  直交座標系を導入する。円板は特殊な方法で保持され、 $z$  軸まわりの回転のみが可能である。下の設問 (4)(6) で述べる棒から与えられる力その他、円板にはいかなる力も働かないと考えてよいものとする。



- (1) 円板  $a$  の密度は一様で、その値は  $\rho$  であった。円板  $a$  の質量中心の座標を図の座標系に基づいて示せ。(答のみでよい)
- (2) 円板  $a$  の  $z$  軸 (円板の回転軸) まわりの慣性モーメントはいくらか。
- (3) はじめ円板  $a$  は角速度の大きさ  $\omega$  で  $z$  軸のまわりを回転していた。この時の円板  $a$  の  $z$  軸まわりの角運動量の大きさを求めよ。(答のみでよい)
- (4) 時刻  $t = 0$  から、図中の  $P$  点  $(R, 0, D/2)$  と  $Q$  点  $(-R, 0, D/2)$  において、同一形状の細い棒を同じ大きさ  $f$  の力で円板の側面に垂直に押し当てたところ (力の方向は  $x$  軸に並行で向きが逆)、時刻  $t = t_1$  で円板  $a$  の回転は停止した。2本の棒の材質は等しく、円板側面との間の動摩擦係数は等しく  $\mu$  である。 $P$  点で円板  $a$  に働く摩擦力の大きさはいくらか。(答のみでよい)
- (5)  $t = 0$  から  $t = t_1$  の間に、 $P$  点で円板  $a$  に働く摩擦力がした仕事の大きさをもとめよ。
- (6) 円板  $b$  の密度も一様であるが、その値は  $2\rho$  である。円板  $b$  も最初の状態では、角速度の大きさ  $\omega$  で  $z$  軸のまわりを回転していた。上記 (4) と同じ装置を用いて、円板  $b$  に大きさ  $0.5f$  の力で 2本の棒を押し当てたところ、停止するまでに要した時間は  $t_2$  であった。ただし、円板  $b$  の側面と棒の間の動摩擦係数も  $\mu$  である。 $t_1$  を用いて  $t_2$  を表せ。答だけでなく、その答に至った筋道を簡単かつ論理的に述べよ。