# 2016年度　実力テスト

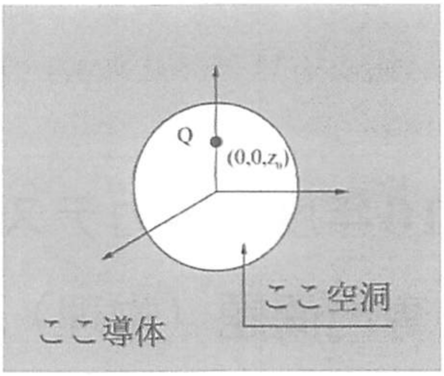
# 専門問題（物理）

2017 年 1 月 12 日（木）
16 : 20 〜 18 : 20 (120 分)

### 解答上の注意

- 問題 I, II, III は必須問題であるので必ず解答すること.
- 問題 IV〜VII は選択問題であるので 2 問を選択して解答すること.
- 解答した各問題につき解答用紙 1 枚を使用すること.
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，問題番号を必ず明記すること.
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい. ただしその旨を表面に明記すること.
- 解答用紙はすべて提出すること.
- 試験開始から 30 分経過した後は，解答用紙を提出の上，退出を認める.

# 専門物理 I　電磁気学（必須）




上の図のように無限に拡がっている導体に原点を中心とした半径 $a$[m] の球状の真空の空洞が空いています。今、この空洞内部の点 $(0, 0, z_0)$ に点電荷 $Q$ を置いたとき、以下の問に答えて下さい。

(1) 導体の電位を 0 とするとき、この空洞内部の電場に対応したポテンシャルの満たすポアソンの方程式および境界条件を書いて下さい。

(2) 鏡像の方法を用いてこの空洞内部のポテンシャルを求めて下さい。

ヒント 点 (0, 0, $z'$) に点電荷 $q$ を置いて、境界条件およびポアソンの方程式が成立するように $z'$ と $q$ をさがして下さい。そのようにして求めたポテンシャルが始めに求めたポアソンの方程式と境界条件を満たしていることをチェックすること!!

(3) 内部の電場を求め、それが導体の表面に垂直になっていることを示して下さい。

(4) 空洞内部に置かれた点電荷の数が 2 個、3 個と増えたとき、各々の電荷一個の場合のポテンシャルの重ね合わせでポテンシャルが決まることをポアソンの方程式の解および境界条件から説明して下さい。

# 専門物理II　量子力学I（必須）

円周$L$の1次元リング上を動く質量$m$の自由粒子を考える。円周にそって位置座標$x$を取ると、$x=0$と$x=L$は同じ点を表す。位置エネルギーを$V(x)=0$とする。運動量演算子は$\hat{p}=\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$で表される。以下の問に答えよ。

1. ハミルトニアン$\hat{\mathcal{H}}$を示せ。

2. 波動関数$\varphi(x)$に課されている周期的境界条件を示せ。

3. $\varphi_n(x) \propto \exp(ik_n x)$、$k_n = \dfrac{2\pi}{L}n$（ただし$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$は整数）がシュレディンガー方程式の解であり、境界条件も満たすことを示せ。このときのエネルギー$E_n$を求めよ。

4. $\varphi_n(x)$を規格化せよ。

5. $\psi_n(x,t)=\varphi_n(x)\exp(-i\omega_n t)$が$i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{\mathcal{H}}\psi$の解となることを示し、$\omega_n$を求めよ。

6. $\psi_c(x,t)=c_1\psi_n(x,t)+c_2\psi_{n'}(x,t)$とする。ただし$c_1$、$c_2$は複素定数であり、$n\neq n'$は整数である。$\psi_c$は規格化されているものとすると、$c_1$、$c_2$の満たす条件を求めよ。

7. $\psi_c(x,t)$が$i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{\mathcal{H}}\psi$の解となることを示せ。

8. $\psi_n(x,t)$および$\psi_c(x,t)$で表される状態に対して、時刻$t$における粒子の存在確率密度$w(x,t)$をそれぞれ求めよ。ここで、$\Delta k=k_{n'}-k_n$および$\Delta\omega=\omega_{n'}-\omega_n$を用いて良い。

9. $\psi_n(x,t)$および$\psi_c(x,t)$で表される状態に対して、時刻$t$における運動量$\hat{p}$の期待値をそれぞれ求めよ。

10. 一般に、$\psi_n(x,t)$で表される状態を定常状態、$\psi_c(x,t)$で表される状態を非定常状態と呼ぶ。問8の結果を使ってこれを説明せよ。

    にもかかわらず、この系に関しては問9のような結果が得られる。保存則という言葉を使ってこれを説明せよ。

# 専門物理Ⅲ　統計力学Ⅰ（必須）

固体振動をミクロカノニカル統計を用いて考察してみよう。$N$ 個の原子が格子点上に並んでいる場合を考える。ただし，原子一個の振動エネルギーは，零点振動を無視すると $\varepsilon_n = \hbar\omega n$ と与えられるとする。ここで $n$ は0以上の整数である。以下の問いに答えよ。

(1) 系の全エネルギーが $E$ である時，系全体のエネルギー量子（$\hbar\omega$）の個数 $M$ はいくつか？

(2) この時，系が取り得る状態の数（状態数）$W$ は，全部で $M$ 個あるエネルギー量子を $N$ 個の原子に分配する場合の数で与えられる。状態数 $W$ を $N$ と $M$ を使って書き下せ。

(3) この時のエントロピー $S$ は $N$ と $M$ を用いて，
$S = k_{\mathrm{B}}[(N+M)\log_e(1+\frac{M}{N}) - M\log_e(\frac{M}{N})]$ と与えられる。導出過程を示せ。ただし，必要ならば十分大きな正整数 $N$ について成り立つスターリングの公式 $\log_e N! = N\log_e N - N$ を用いよ。

(4) エントロピー $S$ をエネルギー $E$ の関数として書き下せ。

(5) エントロピー $S$ をエネルギー $E$ で微分した表式 $\frac{dS}{dE}$ を計算せよ。

(6) $\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$ を解いて，温度 $T$ の関数として $E$ を求めよ。

# 専門物理IV　量子力学II（選択）

$S=\frac{1}{2}\hbar$ のスピン演算子の $x,y,z$ 成分 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ は

$$\hat{S}_x=\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_y=\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_z=\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

と表される。

1, $\hat{S}^2=\hat{S}_x^2+\hat{S}_y^2+\hat{S}_z^2$ とする。交換関係

$$[\hat{S}_x,\hat{S}_y],\quad [\hat{S}_y,\hat{S}_z],\quad [\hat{S}_z,\hat{S}_x],\quad [\hat{S}^2,\hat{S}_z]$$

を計算せよ。

2,

$$\chi_\uparrow=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad \chi_\downarrow=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

とする。これらが $\hat{S}_z$ の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

3,

$$\hat{S}_+=\hat{S}_x+i\hat{S}_y,\quad \hat{S}_-=\hat{S}_x-i\hat{S}_y$$

とする。

$$\hat{S}_+\chi_\uparrow,\quad \hat{S}_-\chi_\uparrow,\quad \hat{S}_+\chi_\downarrow,\quad \hat{S}_-\chi_\downarrow$$

を計算せよ。

4,

$$\chi=c_1\chi_\uparrow+c_2\chi_\downarrow,\quad |c_1|^2+|c_2|^2=1$$

とする。この状態で $\hat{S}_z$ の測定を行ったとき、得られる可能性のある値およびその値が得られる確率を全て記せ。

5, $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ の固有状態とその固有値を全て求めよ。

# 専門物理V　固体物理（選択）

1.　金属中の自由電子の運動方程式が、運動量を $\boldsymbol{p}$、緩和時間を $\tau$、外力を $\boldsymbol{f}$ として

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{p(t)}{\tau} + f(t) \qquad \cdots \quad ①$$

で与えられるとき以下の問いに答えよ。ただし、電子の質量を $m$、電子密度を $n$、電子の電荷を $-e\,(<0)$ とする。

（1）　$f(t) = -eE_0$（直流電場）の場合、定常状態における自由電子の速度 $\boldsymbol{v}$ と移動度 $\mu(\boldsymbol{v} \equiv \mu \boldsymbol{E})$ を求めよ。

（2）　（1）の場合、定常状態における電流密度 $\boldsymbol{j}$ と直流電気伝導度 $\sigma(\boldsymbol{j} \equiv \sigma \boldsymbol{E})$ を求めよ。

（3）　$f(t) = -eE_0 e^{i\omega t}$（交流電場）の場合、定常状態における交流電気伝導度 $\sigma(\omega)$ の実部と虚部を求め、それぞれの周波数依存性を図示せよ。

（4）　（3）から求められる交流伝導度を用いて、金属中の複素誘電率が $\varepsilon(\omega) = 1 - \sigma(\omega)/i\omega\varepsilon_0$（$\varepsilon_0$ は真空の誘電率）で与えられ、金属表面の光学反射率が $R(\omega) = \left|\left(1-\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right)/\left(1+\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right)\right|^2$ で与えられるとき、プラズマ周波数（$\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$）以下の周波数を持つ電磁波に対して、$R(\omega) = 1$ となる理由を説明せよ。ただし、$\omega\tau >> 1$ としてよいものとする。

2.　固体中を運動する電子を量子力学的に取り扱う場合、波数 $\boldsymbol{k}$ とエネルギー $E(\boldsymbol{k})$ を持つブロッホ電子の速度が $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\hbar}\nabla E(\boldsymbol{k})$ で与えられ、運動方程式が $\hbar\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{f}(t)$ で与えられることを用いて、以下の問いに答えよ。

（1）　格子定数 $a$ の単純立方格子中の自由電子に対するシュレーディンガー方程式と周期的境界条件を示し、エネルギー固有値 $E(\boldsymbol{k})$ と速度 $\boldsymbol{v}$ をそれぞれ求めよ。

（2）　ブロッホ電子の速度の時間微分を計算することにより、ブロッホ電子の有効質量が

$$m = \left[\frac{1}{\hbar^2}\nabla_{\boldsymbol{k}}\nabla_{\boldsymbol{k}} E(\boldsymbol{k})\right]^{-1}$$ で表されることを示せ。

（3）　（2）で与えられる有効質量の表式より、半導体中の電子と正孔の有効質量が互いに異符号となることを説明せよ。

# 専門物理VI　相対論＋原子核物理/場と粒子（選択）

1. ある慣性系S $(ct, x, y, z)$ と、それに対して $x$ 方向に速度 $v$ で動く慣性系S′ $(ct', x', y', z')$ がある。慣性系Sからみて同時なふたつの事象 $A_1$, $A_2$ は、慣性系S′では同時ではないことをローレンツ変換と数式を用いて説明せよ。

2. 我々の銀河の直径はおよそ10万光年である。全エネルギー $1.0 \times 10^{20}$ eV をもつ陽子が銀河を横切るのにかかる時間は、(i) 銀河の静止系、(ii) 粒子の静止系、においてそれぞれいくらか。有効数字2桁で答えよ。ただし、簡単のため陽子は銀河内を直進するものとし、(1光年) = (光速) × (1年)、(1年) = $3.2 \times 10^7$(秒) であり、陽子の静止質量を $m_\mathrm{p}c^2 = 9.4 \times 10^8$eV とせよ。

3. 2台のロケットA, Bが距離 $d$ だけ離れて、地球に対して静止した状態で浮かんでいる。この状態でロケットA, Bは $x$ 軸上に並んでいるとする。これらのロケットは地球に対してある時刻に同時に $+x$ 方向にむけて急速な加速をして、短時間のうちに一定速度 $v$ に到達した。このとき、(a) 地球の静止系で、(b) 2台のロケットの静止系でロケットの間の間隔はどうなるか。2台のロケットの運動はともに $x$ 軸上の1次元運動であるとして解答せよ。

4. ガレージがあり、そこに車が入ることを考える。ガレージと車の固有長は $\ell_0$ と等しく、車が走って入庫する。ガレージ静止系から見ると、走っている車はローレンツ収縮をするからガレージに車は収まってしまう。一方で、車の静止系からみると、ガレージはローレンツ収縮をするから車はガレージに収まらない。これは矛盾か？理由とともに述べよ。

# 専門物理Ⅶ　電気・電子回路（選択）

[1] まず、図 1 (I), (II) に示すエミッタ接地 npn バイポーラトランジスタ (以後 Tr と表す)、及びその等価回路についての問に答えよ。ただし b,e,c は Tr のベース、エミッタ、コレクタを表す。ハイブリッド ($h$) パラメタは次の行列式

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

で定義されるとし、図 1 (II) Tr 等価回路図中の 4 つの素子の $A,B,C,D$ はそれぞれ入力側のインピーダンス、電圧源、電流源、及び出力側のインピーダンスを表す。

(1) $h$ パラメタの $h_i$ は出力短絡入力インピーダンスを表し、$v_2 = 0$ の時、$i_1, v_1, i_2, v_2$ のいずれかの量の比で与えられ、例えば $h_i = \left(v_x / i_y\right)_{v_2=0}$ の様に書き下せる ($x,y$ = 1,2)。この例に倣い、$h_i$ を正しく書き下せ。同様にして、出力短絡順方向電流伝達率 $h_f$ を正しく書き下せ。

(2) 同様に、問 (1) の例に倣い、
- 入力開放逆方向電圧伝達（電圧帰還）率 $h_r$
- 入力開放出力アドミタンス $h_o$

の各量を、正しく書き下せ。

(3) 4 つの $h$ パラメタの中で、エミッタ接地（電流）増幅率 $\beta$ と同等のものを書け。

(4) 入力インピーダンス $A$ を $h_i$ を用いて表せ。

(5) 入力側の電圧 $B$ を $h_r$ を用いて表せ。

(6) 出力側の電流 $C$ を $h_f$ を用いて表せ。

(7) 出力インピーダンス $D$ を $h_o$ を用いて表せ。

さて、図 1(III) には、信号電圧が $v_S$ で出力抵抗（インピーダンス）が $R_S$ である信号源を Tr の入力側に接続し、出力側には増幅信号を検出するための負荷抵抗 $R_L$ を接続した場合の等価回路図を示す。以下の問に答えよ。

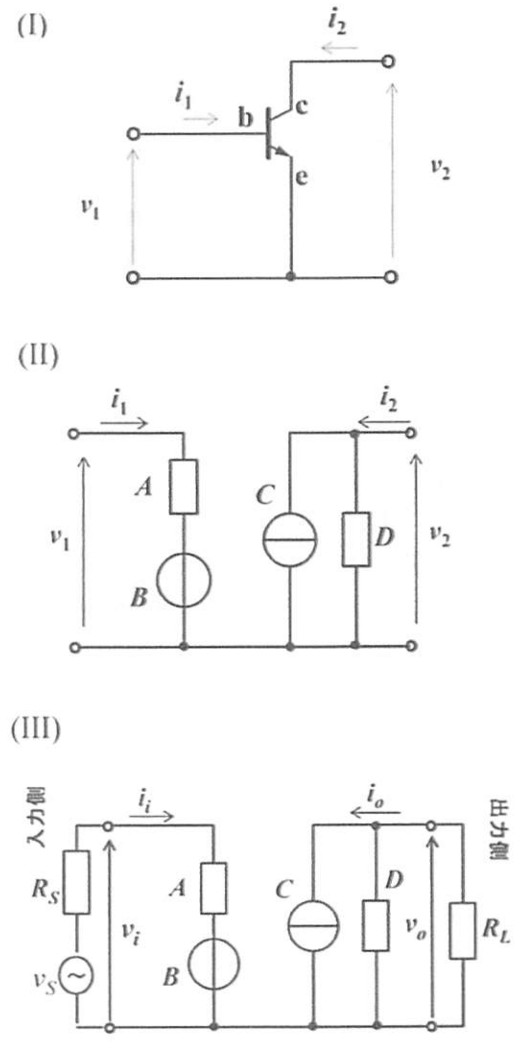



図 1 (I) エミッタ接地バイポーラトランジスタ Tr と、その (II) $h$ パラメタを用いた等価回路、及び Tr の (III) 入力側に信号源、出力側に負荷を接続した等価回路の図

(8) この時 Tr 回路の入力抵抗 $v_i/i_i$ を $h$ パラメタ及び必要なら図中の他の変数を用いて表せ

(9) この時の Tr 回路の出力抵抗 $v_o/i_o$ を $h$ パラメタ及び必要なら図中の他の変数を用いて表せ。

(10) この時の Tr 回路の電流増幅率を $h$ パラメタ及び必要なら図中の他の変数を用いて表せ。

（ヒント：(8) と (10) では $v_o = -i_o R_L$ を利用する. (9) では $v_i = -i_i R_S$ を利用する. (8) と (9) では $\Delta h = h_i h_o - h_f h_r$ として $\Delta h$ を使って表すこと.）