2016年度　実力テスト

専門問題（数学）

2017 年 1 月 12 日（木）
16 : 20 〜 18 : 20 (120 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 9 題ある．そのうち 4 題を選択して答えよ．
- 選択した各問題につき解答用紙 1 枚を使用すること．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，問題番号を必ず明記すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 解答用紙はすべて提出すること．
- 試験開始から 30 分経過した後は，解答用紙を提出の上，退出を認める．

$\boxed{\mathbf{1}}$ xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ に対して，C 上の点 P における接線が x 軸と交わる点を T とし，P から x 軸に下した垂線と x 軸との交点を H とする．TH の長さが一定値 $k > 0$ をとるとき，曲線 C の方程式 $y = f(x)$ を求めよう．

(1) 点 P の座標を $(x, f(x))$ として接線の方程式を求めよ．また，点 T の x 座標を x と $f(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ の満たす微分方程式を導き，$f(x)$ を求めよ．

(3) 曲線 C が点 $(0,1)$ を通るとき，C の方程式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問に答えよ．

(1) a, b, c を整数とし，$\gcd(a,b) = 1$ と仮定する．整数 x, y に関する方程式 $ax + by = c$ の一組の解を $x = x_0, y = y_0$ とする．このとき，この方程式の任意の解は $x = x_0 + bt, y = y_0 - at \, (t \in \mathbb{Z})$ と書けることを示せ．

(2) G を群とする．

(a) 部分群 $H \subset G$ が G の正規部分群であることの定義を述べよ．

(b) H_1 と H_2 がともに G の正規部分群ならば，$H_1 \cap H_2$ は G の正規部分群であることを示せ．

(c) G が可換群ならば，G の任意の部分群は正規部分群であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問に答えよ．

(1) $a_1 = 2$ である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ $(n = 1, 2, ...)$ を満たすとする．

(a) $0 < a_n < 3$ $(n = 1, 2, ...)$ を示せ．

(b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることを示せ．

(c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する理由を述べよ．また，極限の値を求めよ．

(2) 次の無限級数の収束，発散を，詳しい理由を述べて判定せよ．

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2017} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$　以下の問に答えよ．

(1) 写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $A \subset X$ に対して，$f^{-1}(f(A)) = A$ は常に成り立つか．常に成り立つ場合は証明し，そうでない場合は反例を挙げよ．

(2) 同値関係 $\sim$ の定義された集合 X の元 a, b に対して，a, b の同値類をそれぞれ $C(a), C(b)$ で表す．このとき，$a \sim b$ ならば $C(a) = C(b)$ が成り立つことを示せ．

(3) 距離空間 (X, d) の元 $x \in X$ に対して，$G := \{y \in X \mid d(y, x) < 1\}$ とおく．このとき，$G^i = G$ が成り立つことを示せ．ただし，G^i は G の内部を表す．

$\boxed{\mathbf{5}}$　$z \in \mathbb{C}$ に対して有理関数 $f(z) = \dfrac{z^2 - 5}{(z-1)^2(z+3)}$ を考える．以下の問に答えよ．ただし，複素積分における積分路は反時計回りに向きづけられているとする．

(1) $f(z)$ を部分分数に展開せよ．

(2) $f(z)$ の極をすべてあげ，その極の位数，および極におけるローラン展開の主要部を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z-1|=1} f(z)\,dz$ を計算せよ．

(4) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=5} f(z)\,dz$ を計算せよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$　$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 測度空間の定義を述べよ．また，$A, B \in \mathcal{M}$ かつ $A \subset B$ ならば，$\mu(A) \leq \mu(B)$ となることを示せ．

(2) X 上の実数値関数 f が $\mathcal{M}$-可測であることの定義を述べよ．また，X 上の実数値関数 f, g がともに $\mathcal{M}$-可測ならば，$\max\{f, g\}$ も $\mathcal{M}$-可測であることを示せ．

(3) ルベーグの収束定理を述べよ．また，X 上の非負値 $\mathcal{M}$-可測関数列 $\{f_n\}$ がある可積分関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に X 上で各点収束するならば，等式

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{f_n \leq f\}} f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

が成り立つことを示せ．

7 熱源分布 $g(x)$ と初期温度分布 $f(x)$ をもつ厚さ a の一様な物質が，その両面を一定温度 T_1, T_2 に保たれるとき，物質内部の温度を求める問題を考えよう．問題は次の熱伝導方程式に関する初期値境界値問題で記述される．ここで κ は正の定数である．

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) & (0 < x < a,\ 0 < t < \infty) \\ u(0,t) = T_1, \quad u(a,t) = T_2 & (0 < t < \infty) \\ u(x,0) = f(x) & (0 < x < a) \end{cases}$$

関数 $u_1(x), u_2(x,t)$ をそれぞれ以下の境界値問題，初期値境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_1}{dx^2} = -\dfrac{1}{\kappa} g(x) & (0 < x < a) \\ u_1(0) = T_1, \quad u_1(a) = T_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & (0 < x < a,\ 0 < t < \infty) \\ u_2(0,t) = u_2(a,t) = 0 & (0 < t < \infty) \\ u_2(x,0) = f(x) - u_1(x) & (0 < x < a) \end{cases}$$

の解とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $(*)$ の解 $u(x,t)$ は $u(x,t) = u_1(x) + u_2(x,t)$ と表されることを示せ．

(2) $g(x) \equiv b$（定数）のとき，$u_1(x)$ を求めよ．また，$u_2(x,t)$ を $f(x)$, $u_1(x)$ を用いて表せ．

8 実数 s, t をパラメータとする空間内の曲面

$$\begin{cases} x = 3s + 3t + 2s^3 + 2t^3 - 6s^2 t - 6st^2 \\ y = -2s^3 + 2t^3 - 3s + 3t - 6s^2 t + 6st^2 \\ z = 12st \end{cases}$$

について，$s = 1$, $t = 1$ で表される点 $(-2, 0, 12)$ を $\mathbf{p}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 点 $\mathbf{p}$ における曲面の単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 点 $\mathbf{p}$ における曲面の Gauss 曲率と平均曲率を求めよ．

9 以下の各問に次ページの正規分布表を用いて答えよ．

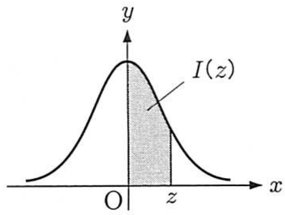
(1) 表の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ である硬貨を 100 回投げるときの表の回数を S とするとき，$S \leqq 45$, $46 \leqq S \leqq 52$, $S \geqq 53$ の確率をド・モワブルの定理 (中心極限定理) を用いて求めよ．

(2) 表の出る確率が不明の硬貨を 100 回投げたところ表が 61 回出た．表が出やすいといえるかどうかを検定したい．

(a) 検定する帰無仮説を書け．

(b) 危険率 5%，および 1% で検定せよ．

付表２　正規分布表Ｉ



$$z \to I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986