2016年度　実力テスト
基礎問題（コース共通）

2017 年 1 月 12 日（木）
15 : 05 〜 16 : 05 (60 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 3 題ある．全ての問題に解答すること．
- 各問題につき解答用紙 1 枚を使用すること．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，問題番号を必ず明記すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 解答用紙はすべて提出すること．
- 途中退出は不可とする．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle \int \frac{x^2+3x-16}{x^3+x^2-5x+3}dx$ を計算せよ.

(2) (a) 集合 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 4\}$ を図示し，平面極座標に関する不等式で表せ.

(b) 重積分 $\displaystyle \iint_D x^2 y\, dxdy$ の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求め，A が対角化可能かどうか判定せよ.

(2) ${}^tA = A^{-1}$ であることを示せ．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(3) $B = A + {}^tA$ とおくとき，B が対角化可能かどうか判定せよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間内に定点 O があり、O を原点とする 3 次元直交座標系（右手系）$x-y-z$ を導入する。O から測った空間の点 (x,y,z) の位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。O のまわりには、次式のポテンシャルで表現される保存力場がある。

$$U(r) = -\frac{a}{r}\exp(-\mu r)$$

ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$。また、$a > 0$、$\mu > 0$ は実定数である。

(I) この保存力場中で運動している n 個の質点について次の問に答えよ。それぞれの質点の質量と位置ベクトルを m_i、$\boldsymbol{r}_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする。質点は全てこの保存力場に束縛されており、質点間に働く力は無視できるとする。

(1) この質点系の質量中心（重心）を表すベクトル $\boldsymbol{R}(t)$ を求めよ。

(2) i 番目の質点 $(m_i$、$\boldsymbol{r}_i(t))$ の運動方程式を求めよ。

(3) i 番目の質点の時刻 t における速度を $\boldsymbol{v}_i(t)$ とすると、この質点が上記の保存力場に束縛されているための条件は何か。

(4) 質量中心が等速度運動をするための条件を述べよ。

(5) O のまわりの質点系の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存することを示せ。

(II) O 点から十分遠い位置 $(X, 0, d)$（ただし、$X > 1/\mu > d > 0$）から、質量 M の質点 P が、速度 $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（ただし、$V > 0$）で上記保存力場に侵入してきた。

(6) 質点 P の O のまわりの角運動量の大きさ ℓ_M はどのように表されるか。

(7) 質点 P が点 O に最接近したときの O からの距離を s とする。この時の質点 P の速さ V' を求めよ。