２０１５年度実力テスト（専門物理問題）

２０１６年１月７日（木）

１７：３５～１９：３５　１２０分

解答上の注意

・問題は全部で五題あり、そのうち三題を選択して答えよ。

・すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・答案は解答用紙の授業科目の欄に受験科目の該当項目に○をつけ、選択した問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

・解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

・試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出の上、退室を認める。

専門物理 I 量子力学 B

角運動量ベクトルの演算子 $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ は以下のように定義される。

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} \tag{1}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z)$ は位置ベクトルの演算子、$\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ は運動量ベクトルの演算子で交換関係 $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}$ を満たす。ここで $\delta_{j,k}$ はクロネッカーのデルタで $j = k$ の場合 1 をとり、それ以外の場合 0 をとる。j, k はそれぞれ x, y または z をとる。

1 上の $\hat{r}_j$ と $\hat{p}_k$ の交換関係から出発して $\hat{\boldsymbol{L}}$ の各成分の間の交換関係

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y],\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z],\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \tag{2}$$

を求めよ。

2 角運動量ベクトルの大きさの 2 乗の演算子 $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ と $\hat{L}_z$ の交換関係 $[\hat{L}^2, \hat{L}_z]$ が 0 となること、すなわち可換であることを示せ。

3 $\hat{L}_+$ と $\hat{L}_-$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ &= \hat{L}_x + i\hat{L}_y \\ \hat{L}_- &= \hat{L}_x - i\hat{L}_y \end{aligned} \tag{3}$$

このとき次の交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}_+] &= \hbar\hat{L}_+ \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_-] &= -\hbar\hat{L}_- \end{aligned} \tag{4}$$

を示し、さらにこれを用いて

$$\hat{L}_z\hat{L}_\pm = \hat{L}_\pm\hat{L}_z \pm \hbar\hat{L}_\pm \tag{5}$$

を示せ。

4 次の交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{L}^2, \hat{L}_+] &= 0 \\ [\hat{L}^2, \hat{L}_-] &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

を示せ。

5 $\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ は可換なので同時固有状態を持つ。それぞれの固有値が $\hbar^2 l(l+1)$、$\hbar m$ である同時固有状態を Y_{lm} と記す。縮退はない。

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 Y_{lm} &= \hbar^2 l(l+1) Y_{lm} \\ \hat{L}_z Y_{lm} &= \hbar m Y_{lm} \end{aligned} \tag{7}$$

このとき、

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ Y_{lm} &= C_1 Y_{l,m+1} \\ \hat{L}_- Y_{lm} &= C_2 Y_{l,m-1} \end{aligned} \tag{8}$$

を示せ。ここで $C_1,\ C_2$ は l, m に依存する規格化定数である。

専門物理 II（統計力学 A）

二準位系をミクロカノニカル統計で考える。ε_1 と ε_2 の二つのエネルギーを取り得る粒子が N 個ある孤立系を考える。エネルギー ε_1 を持つ粒子の数を N_1 個，エネルギー ε_2 を持つ粒子の数を N_2 個とおく。また，系の全エネルギーを E とおく。次の問いに答えよ。

(1) N を N_1 と N_2 使って表せ。

(2) E を N_1，N_2，ε_1，ε_2 を使って表せ。

(3) 系の状態数 $W(N, N_1)$ を N と N_1 を用いて書け。（ヒント：全部で N 個ある粒子のうちエネルギー ε_1 を持つ N_1 個の粒子を選ぶ場合の数）

(4) Stirling の公式 $\log N! \sim N \log N - N$ を使って計算し，エントロピー S を N と N_1 を使って書き下せ。ただし，$N \log N = (N - N_1) \log N + N_1 \log N$ といった式変形を使うと良い。

(5) (4) で得られたエントロピーの表式 $S(N_1)$ と (1)，(2) で得られた関係式を使うと，エントロピー S がエネルギー E の関数として $S(E) = -Nk_\mathrm{B}\left[\frac{E-N\varepsilon_1}{N(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\log\frac{E-N\varepsilon_1}{N(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} + \frac{N\varepsilon_2-E}{N(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\log\frac{N\varepsilon_2-E}{N(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\right]$ のように得られる。$\frac{dS}{dE}$ を計算せよ。

(6) 温度 T の定義式を使ってエネルギー期待値 E を計算せよ。

専門物理 III

1. 特殊相対性理論の指導原理である「特殊相対性原理」と「光速度不変の原理」について物理的に説明せよ。

2. 慣性系 $\mathrm{S}(ct, x, y, z)$ と、S 系に対して $+x$ 方向へ速度 βc で動く慣性系 $\mathrm{S}'(ct', x', y', z')$ へのローレンツ変換を以下のように導出してみよう。以下では光速を c とする。

   (i) $(ct',\, x')$ を $(ct,\, x)$ および定数 $A > 0,\, K > 0$ を用いて

$$\begin{cases} ct' = A(ct - \beta x) \\ x' = K(x - \beta ct) \end{cases}$$

   と表すことができる。特殊相対性原理および光速度不変の原理に基づくと、逆変換はどのような形になるべきか。$(ct,\, x)$ を $(ct',\, x')$ および $A,\, K$ を用いて表せ。

   (ii) 前問の結果を用いて定数 $A,\, K$ を求めよ。

3. (i) S 系で測って、速度 $v_0 = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ で x 軸方向へ運動する物体がある。S' 系で測って、この物体の速度が $v' = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ であった。$\beta' = v'/c$ を $\beta_0 = v_0/c$ と β で表せ。

   (ii) 前問の結果を用いて、S 系と S' 系の間で光速度不変の原理が成り立つことを確認せよ。

実力試験　専門物理 IV　固体物理

１．同種イオンからなる１次元結晶格子の格子振動を考える。格子定数を a、イオンの質量を M、一次元調和振動子のばね定数を K とし、イオンの総数を N とする。n 番目のイオンの変位を $u(na,t)$ と表すとき、以下の問いに答えよ。

（１） n 番目のイオンに対する運動方程式を導け。

（２） （１）で導いた運動方程式の解として平面波 $u(na,t) \propto e^{i(kna-\omega t)}$ を仮定した場合、周期的境界条件 $u(Na,t) = u(0,t)$ から波数 k を求めよ。

（３） この格子振動の分散関係 $\omega(k)$ を求め、第一ブリルアンゾーンの範囲内で図に示せ。

（４） k~0 近傍における群速度 $v_g = \partial\omega(k)/\partial k$ の大きさを求めよ。

（５） 質量が異なる２つのイオン A,B からなる１次元結晶の場合、（３）で求めた分散関係がどのように変化するのかを定性的な図を用いて説明せよ。

２．T=0 における金属中の３次元自由電子フェルミ気体では、Pauli の排他律により波数空間（k 空間）の原点を中心とするフェルミ球内のすべての量子状態が占有される。電子密度を n とするとき、以下の問いに答えよ。

（１） フェルミ球の半径 k_F とフェルミエネルギー E_F をそれぞれ求めよ。

（２） 単位体積当たりの内部エネルギー u が、$u = \frac{3}{5} n E_F \left[1 + \frac{5}{12}\pi^2 \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right]$ で与えられるとき、電子比熱 c_v を求めよ。また、この電子比熱と古典的電子気体モデルから得られる電子比熱との相違点を２つ挙げよ。

専門物理 V（電子回路）

[1] 図 1 に示す、電圧増幅率が A_0 (= ∞)で与えられる理想的なオペアンプと 4 個の抵抗を使った増幅回路について以下の問いに答えよ。なお、R_1, R_2, R_3, R_f は 4 個の抵抗の抵抗値を表す。

ケース (1)：図中の抵抗の抵抗値 R_2 が無限大（$R_2 = \infty$）で、且つ抵抗値 R_3 がゼロ（$R_3 = 0$）の場合を考えよう。入力信号電圧は端子 1 からの v_{i1} のみを考える。

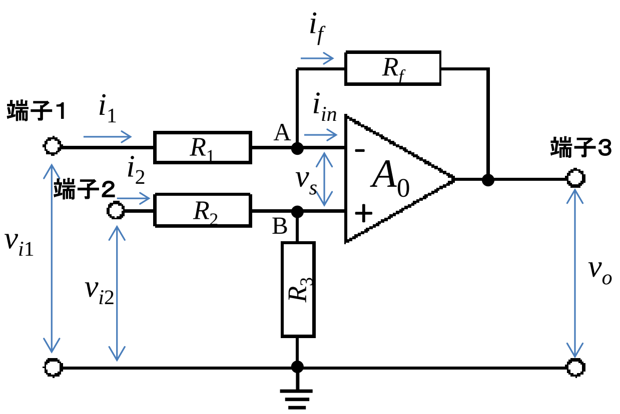

図 1　オペアンプを使った増幅回路

(1)この時入力電流 i_1 と i_f の間になり立つ関係を式で表せ。
(2)回路に使用されているオペアンプ自体の入力インピーダンス z_i を求めよ。
(3)**ケース (1)** の場合の、本増幅回路の電圧増幅率 $A_v^-(=v_o/v_{i1})$ を図中にある抵抗値を用いて式で表せ。

ケース (2)：図中の抵抗の抵抗値 R_2 がゼロ、抵抗値 R_3 が無限大（$R_2 = 0, R_3 = \infty$）で、且つ端子 1 が接地されている場合を考える。この場合、入力信号電圧は端子 2 からの v_{i2} である。

(4)この時，電流 i_1 と i_f の間になり立つ関係を式で表せ。
(5)この時，（信号）電圧 v_{i2} と電圧 v_s の間になり立つ関係を式で表せ。
(6)**ケース (2)** の場合の、本増幅回路の電圧増幅率 A_v^+ を図中の抵抗値を用いて式で表せ。

ケース (3)：最後に、信号電圧 v_{i1} 及び v_{i2} が同時にそれぞれ端子 1 及び 2 から入力された場合を考える。それぞれの入力電圧に対する出力電圧 v_{o1} 及び v_{o2} の和が総出力電圧 v_o になる（$v_o = v_{o1} + v_{o2}$）とする。なお、本ケースでは抵抗値 $R_1, R_2, R_3, R_f \neq 0$ 且つ $R_1, R_2, R_3, R_f \neq \infty$ であり、適当な大きさを持つものとする。

(7) 電圧 v_{i1} と電圧 v_{o1} の関係を図中の抵抗値を用いて式で表せ。
(8) 電圧 v_{i2} と電圧 v_{o2} の関係を図中の抵抗値を用いて式で表せ。
(9) 総出力電圧 v_o を式で表せ。
(10) **ケース (3)** の場合、4 つの抵抗の抵抗値 R_1, R_2, R_3, R_f を適切に選ぶことで、本増幅回路の出力電圧 v_o は入力電圧の差（$v_{i1} - v_{i2}$）に比例することとなる。4 つの抵抗の抵抗値の適切な選び方（抵抗値間で成り立つ関係）について、式を用いて表せ。