2015年度実力テスト（基礎物理問題）

2016年1月7日（木）

16：20～17：20　60分

解答上の注意

・すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・答案は解答用紙の受験科目の該当項目に〇をつけ、問題番号を記入し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

・解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

・途中退出は不可とする。

物理基礎 1

重力定数（万有引力定数）を G とする。下図のように原点Oにある惑星（質量 M）のまわりを人工衛星S（質量 m）が反時計周りに周回している。惑星と人工衛星は質点として扱うことができ、また、$M \gg m$ であるため、惑星は原点Oから動かないとみなせる。このとき、Sの位置を図のように、時刻 t でのOからの距離（動径距離）$r(t)$ と方位角 $\phi(t)$ を用いた２次元極座標系を用いて表すことにする。

下記の問 (1) 〜 (7) に答えよ。

(1) Sの動径方向の速度と加速度 $v_r(t)$、$a_r(t)$、および方位角方向の速度と加速度 $v_\phi(t)$、$a_\phi(t)$ を $r(t)$ と $\phi(t)$、およびその導関数を用いて表せ。

(2) Sの座標が $(r(t), \phi(t))$ の時の動径方向および方位角方向のSの運動方程式を書け。

(Ⅰ) はじめSは軌道半径 R の円軌道を一定の速さ v_0 で周回していた。

(3) v_0 を R の関数として表せ。

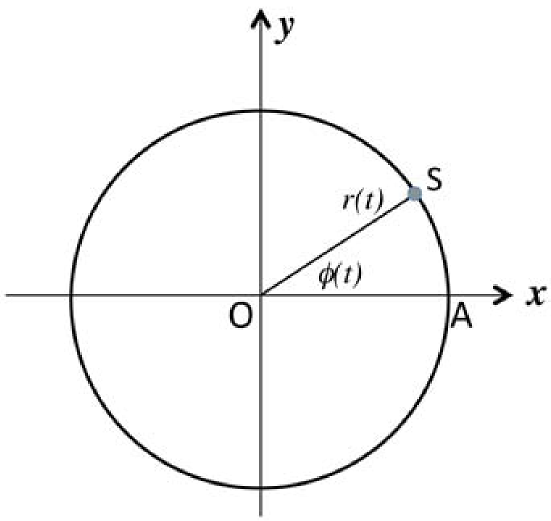
(Ⅱ) 図中の点 $\mathrm{A}(R, 0)$ でガスを逆噴射しSは速さを $\dfrac{2}{\sqrt{5}}v_0$ に減速（デブースト）した。ただし、速度の方向は変化せず、このとき噴射したガスの質量は無視できるものとする。

(4) 重力は保存力であるから、減速後、Sの力学的エネルギー E は保存する（一定である）。減速直後の E を v_0 を用いて表せ。

(5) Sが新しい軌道に移行した後、SのOに関する角運動量 $\vec{\ell}$ が保存する（一定である）ことを (2) で答えた運動方程式をもとに示せ。

(6) $\ell = |\vec{\ell}|$ を v_0 を用いて表せ。

(7) Sが再び x 軸を通過する（すなわち $\phi = \pi$）ときの動径距離と速さを r_1、v_1 とする。$\dfrac{r_1}{R}$ と $\dfrac{v_1}{v_0}$ を求めよ。



実力試験問題

$\boxed{2}$ 電磁気学

真空中の電場について以下の問に答えなさい。なお真空の誘電率は ε_0 である。
(i) 原点に点電荷 Q がある。適当な基本ベクトル系を使って、この電荷が作る電場を書きなさい。

(ii) 点 $\vec{r}_1$ に点電荷 Q_1 が、 点 $\vec{r}_2$ に点電荷 Q_2 が, ・・ 点 $\vec{r}_i$ に点電荷 Q_i が、・・ 点 $\vec{r}_n$ に点電荷 Q_n がある。この n 個の点電荷が点 $\vec{r}$ に作る電場を求めなさい。

(iii) 連続電荷分布 $\rho(\vec{r'})$ が点 $\vec{r}$ に作る電場を積分記号を使って表しなさい。（クーロンの法則）

(iv) x-y 平面に一様な電荷密度 σ_0[C/m^2] で分布した電荷（無限平面電荷）の作る電場を求めなさい。

$\boxed{3}$　量子力学

バネにつながれている粒子が x 軸方向にのみ運動する 1 次元調和振動子を考える。粒子の質量を m、バネのばね定数を $k=m\omega^2$、釣り合いの位置を $x=0$ とすると、ハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

であらわされる。ここで、$\hat{p}=\dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial x}$ は運動量演算子である。このとき、基底状態の波動関数は、長さの次元を持ったパラメータ a を用いて $\varphi_a(x)=N\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]$ で表されることが知られている。ここで N は規格化定数である。

以下の問に答えよ。ただし、ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-z^2)\mathrm{d}z \;=\; \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}z^2\exp(-z^2)\mathrm{d}z=\sqrt{\pi}/2$$

を用いてもよい。

問 A：　以下の手順で、波動関数 φ_a の性質について調べよ。

A1) $\varphi_a(x)$ を規格化せよ。

A2) $\varphi_a(x)$ で表される状態について、期待値 $\langle x\rangle$、$\langle x^2\rangle$、$\langle\hat{p}\rangle$ および $\langle\hat{p}^2\rangle$ を求めよ。

問 B：以下の手順で、シュレディンガー方程式を解け。

B1) シュレディンガー方程式を記せ。

B2) φ_a がシュレディンガー方程式の解となるように、a の値を定めよ。

B3) 上で求めた φ_a に対するエネルギーの値 E が基底状態のエネルギーである。E はどのような値をとるか。

問 C：不確定性原理について答えよ。

C1) $\Delta x^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$、$\Delta p^2=\langle\hat{p}^2\rangle-\langle\hat{p}\rangle^2$ と定義する。これらを用いて不確定性原理について説明せよ。

C2) 問 A2) の結果を用いて、φ_a で表される状態における Δx^2 および Δp^2 がパラメータ a に対してどのように振る舞うかを示せ。これを問 C1) と関連づけて説明せよ。

C3) 古典力学においては、この系の基底状態のエネルギーは $E=0$ である。しかし、問 B3) の結果から、量子力学においては $E\neq 0$ である。このことについて説明せよ。