２０１４年度実力テスト（専門物理問題）

２０１５年１月８日（木）

１７：３５～１９：３５　１２０分

解答上の注意

・問題は全部で五題あり、そのうち三題を選択して答えよ。

・すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・答案は解答用紙の授業科目の欄に選択した問題番号を必ず明記し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

・解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

・試験開始後 30 分経過した後は、解答用紙を提出の上、退室を認める。

専門物理 I

量子力学 B

1 次元調和振動子のハミルトニアンは以下のように表される。

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

ここで $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ は運動量の演算子、$\hat{x}$ は位置の演算子である。演算子 $\hat{a}$ を次のように定義する。

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m}}\hat{p}\right) \tag{2}$$

このとき、$\hat{a}$ とそのエルミート共役の演算子 $\hat{a}^\dagger$ を用いて 1 次元調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

と表される。

$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ とし、$\hat{N}$ の固有値 n を持つ規格化された固有関数を $\varphi_n(x)$ とすると

$$\begin{aligned} \hat{N}\varphi_n(x) &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\varphi_n(x) = n\varphi_n(x) \\ \hat{\mathcal{H}}\varphi_n(x) &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi_n(x) \end{aligned} \tag{4}$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} \hat{a}\varphi_n(x) &= \sqrt{n}\varphi_{n-1}(x) \\ \hat{a}^\dagger\varphi_n(x) &= \sqrt{n}\varphi_{n+1}(x) \end{aligned} \tag{5}$$

となる。

1. $\varphi_n(x)$ での $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の期待値 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi_n^*(x)\hat{x}\varphi_n(x)$、$\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi_n^*(x)\hat{p}\varphi_n(x)$ を求めよ。
2. $\varphi_n(x)$ での $\hat{x}^2$ と $\hat{p}^2$ の期待値 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi_n^*(x)\hat{x}^2\varphi_n(x)$、$\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi_n^*(x)\hat{p}^2\varphi_n(x)$ を求めよ。
3. $\Delta x = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi_n^*(x)\hat{x}^2\varphi_n(x)\right\}^{1/2}$、$\Delta p = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi_n^*(x)\hat{p}^2\varphi_n(x)\right\}^{1/2}$ とするとき、$\Delta x \cdot \Delta p$ を求めよ。
4. 基底状態の規格化された固有関数 $\varphi_0(x)$ は

   $$\hat{a}\varphi_0(x) = 0 \tag{6}$$

   を満たす。$\varphi_0(x)$ を求めよ。

専門物理 II

三次元の固体振動をカノニカル統計で考える。原子一個当たりの振動エネルギーは，0 以上の整数 n_x, n_y, n_z を用いて次のように与えられる。

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2}) + \hbar\omega(n_y + \frac{1}{2}) + \hbar\omega(n_z + \frac{1}{2}) \tag{1}$$

以下の問いに答えよ。ただし k_{B} はボルツマン定数，T は温度，$\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ とする。

(1) 原子 1 個あたりの分配関数 z_1 は，$z_1 = \left[\frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right]^3$ となる。これを導出せよ。

(2) (1) の分配関数から原子 1 個あたりのエネルギー期待値 ε を計算せよ。

(3) N 原子系の分配関数 $Z(= z_1^N)$ からヘルムホルツの自由エネルギー $F = -\frac{1}{\beta}\log_e Z$ を計算せよ。

(4) エントロピー $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ を計算せよ。

(5) (4) の結果から $F = E - TS$ が成り立つことを示せ。ただし $E(= N\varepsilon)$ は N 原子系のエネルギー期待値である。

専門物理 III

1. S 系 $(ct,\,x,\,y,\,z)$ から S$'$ 系 $(ct',\,x',\,y',\,z')$ へのローレンツ変換を定義する行列 L、および電磁場テンソル F を、それぞれ

$$L=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad F=\begin{pmatrix}0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c\\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y\\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x\\ E_z/c & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}$$

とすると、電磁場テンソルのローレンツ変換は $F'=LFL^{-1}$ と与えられる。このとき以下の問に答えよ。

(i) S$'$ 系での電磁場 $E_x{}'$, $E_y{}'$, $E_z{}'$, $B_x{}'$, $B_y{}'$, $B_z{}'$ を S 系での電磁場 E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z を用いて表せ。

(ii) $\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2$, $\vec{E}\cdot\vec{B}$ はともにローレンツ不変となることを示せ。

2. 2 台のロケット A, B が宇宙空間に距離 d だけ離れて、地球に対して静止した状態で浮かんでいる。これらのロケットは地球に対してある時刻に同時に同じ方向にむけて急速な加速をして、短時間のうちに一定速度 v に到達した。このとき、2 台のロケットの間の間隔は、(a) 地球の静止系で、(b) ロケットの静止で、それぞれどうなるか。

専門物理 IV

実力試験　物性物理概論　固体物理

以下の文章の空欄にあてはまる最も適切な語句、数値、または式を答えると共に、以下の問(a)および問(b)に答えよ。

結晶格子の基本ベクトル（$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$）と整数（$n_1, n_2, n_3$）を用いて $\mathbf{R} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$ で表される格子点の集合をブラベ格子と呼ぶ。ブラベ格子の並進対称性は、結晶中の位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対する任意の関数 $f(\mathbf{r})$ を用いて $f(\mathbf{r}+\mathbf{R}) = \boxed{\quad(1)\quad}$ と表される。したがって、$f(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})$ の場合は $\exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}) = \boxed{\quad(2)\quad}$ となる。この条件を満たす波数ベクトル $\mathbf{K}$ で表される格子点の集合を $\boxed{\quad(3)\quad}$ と呼ぶ。$\boxed{\quad(3)\quad}$ の基本ベクトルは、結晶格子の基本ベクトルを用いて、$\mathbf{b}_1 = 2\pi\dfrac{\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)}$ というように求められるので、格子定数 a を持つ単純立方格子の $\boxed{\quad(3)\quad}$ は、格子定数 $\boxed{\quad(4)\quad}$ を持つ単純立方格子となる。ラウエは、結晶格子に入射した X 線（入射 X 線の波数を $\mathbf{k}$ とする）が格子点に位置する原子または分子に散乱される場合（散乱 X 線の波数を $\mathbf{k}'$ とする）、異なる格子点からの散乱 X 線が互いに強め合う条件が、$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} = \boxed{\quad(5)\quad}$ となることを示した。弾性散乱（$|\mathbf{k}'|=|\mathbf{k}|$）の場合は、$(\mathbf{k}-\mathbf{K}/2)\cdot\mathbf{K} = \boxed{\quad(6)\quad}$ より、この条件を満たす $\mathbf{k}$ は $\mathbf{K}$ の $\boxed{\quad(7)\quad}$ 面上にあることが分かる。これをブラッグ面と呼ぶ。これは、$\boxed{\quad(3)\quad}$ の基本単位格子である $\boxed{\quad(8)\quad}$ がブラッグ面に囲まれた領域であることを意味する。

固体中の自由電子をフェルミ統計に従うフェルミ気体と考える量子論では、基底状態（すなわち、絶対零度）における 3 次元自由電子は、$\boxed{\quad(3)\quad}$ 空間において半径 k_F の球内のすべての量子状態を占有していると考える。したがって、この球の体積 $\boxed{\quad(9)\quad}$ を 1 つの量子状態が $\boxed{\quad(3)\quad}$ 空間に占める体積で割った量に、スピンの自由度を掛けると自由電子の数に等しいという関係が得られる。これより体積 V の中に自由電子が N 個ある場合、$k_F = \boxed{\quad(10)\quad}$ と書けることが導かれる。さらに、波数 $\mathbf{k}$ と質量 m を持つ自由電子のエネルギー固有値は $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m$ で与えられるので、自由電子フェルミ気体の内部エネルギーは、$U_0 = 2\sum_{k\le k_F}\varepsilon(\mathbf{k})$ から求めることができる。

問(a)　$U_0 = 2\sum_{k\le k_F}\varepsilon(\mathbf{k})$ を計算し、自由電子フェルミ気体の内部エネルギー U_0 を k_F を用いて表せ。

問(b)　自由電子の数が $N = \sum_{\mathbf{k}} 1 = V\cdot\int_0^\infty D(\varepsilon)d\varepsilon$ で与えられる時の状態密度 $D(\varepsilon)$ を求め、

$$D(E_F) = \frac{3}{2}\left(\frac{N}{VE_F}\right)$$ となることを示せ。ただし、$E_F = \dfrac{\hbar^2 {k_F}^2}{2m}$ である。

専門物理 V

[1] 図 1 のような抵抗 R, 容量 C のコンデンサ, 直流電源 E から成る回路について，以下の問いに答えよ。なお，下表のラプラス変換表を用いてもよい。

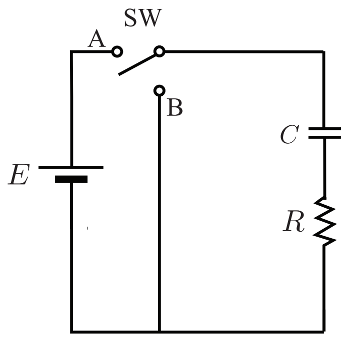

図 1

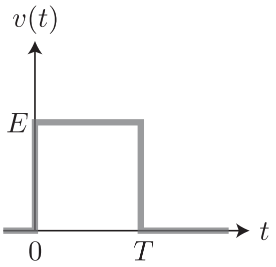

図 2

(1) 時刻 $t=0$ でスイッチ SW の接点 A を閉じた。$t \geq 0$ において回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ。また，その概形を図示せよ。ただし，すべての回路素子の初期電圧および初期電流は 0 とする。

(2) 図 2 に示す波形 $v(t)$ のラプラス変換を求めよ。

(3) 図 1 の回路において，時刻 $t=0$ でスイッチ SW の接点 A を閉じ，時刻 $t=T$ でスイッチ SW の接点を B へ切り替えた。$t \geq 0$ において回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ。また，$T=RC$ の時の $i(t)$ の概形を図示せよ。ただし，すべての回路素子の初期電圧および初期電流は 0 とする。

ラプラス変換表

時間関数 $x(t)$ ($t<0$ で $x(t)=0$ とする)	ラプラス変換 $X(s)$
$\delta(t)$ 単位インパルス関数	1
$u(t)$ 単位ステップ関数	$1/s$
t	$1/s^2$
$t^2/2$	$1/s^3$
$\exp(-at)$	$1/(s+a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$	$sX(s)-x(0)$
$x^{(-1)}(t)=\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$	$X(s)/s+x^{(-1)}(0)/s$
$t \geq a$ において $x(t-a)$ $t<a$ において 0	$\exp(-as)X(s)$

[2] オペアンプを使った回路について以下の各問に答えよ。オペアンプは全て理想的なものとし、バーチャルショート (仮想短絡) が成立するものとする。

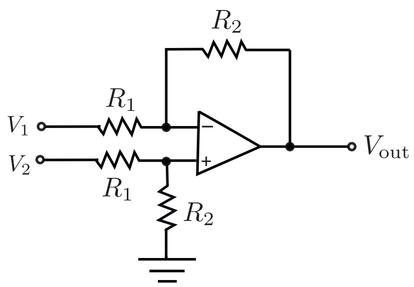

図 3

(1) 図 3 は差動増幅器と呼ばれる回路である。この回路に図 3 のように V_1, V_2 を入力した時、回路の出力 V_{out} を求めよ。

(2) 図 3 の差動増幅器は入力が非対称, 入力インピーダンスが低いといった理由から、実際には図 4 のようなインスツルメンテーションアンプがよく使われる。点 A,B における電位をそれぞれ V_A, V_B とした時、理想オペアンプの入力には電流が流れこまないことに注意して、$V_1 - V_2$ を V_A, V_B, R_0, R_1, R_2 を用いて表せ。

(3) V_{out} を $V_1, V_2, R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$ を用いて表せ。

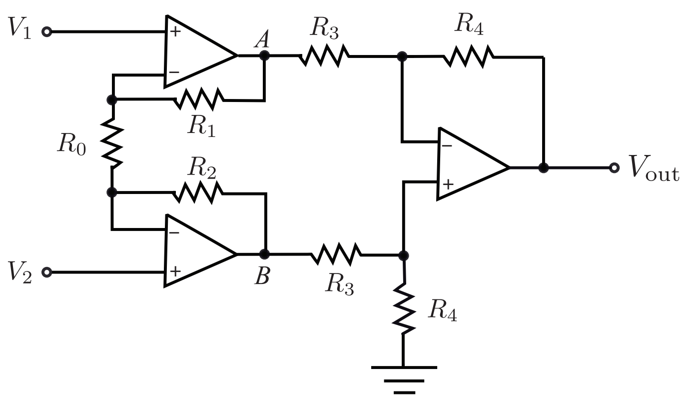

図 4