２０１３年度実力テスト（専門物理問題）

２０１３年１月９日（木）

１７：３５～１９：３５　１２０分

解答上の注意

・問題は全部で五題あり、そのうち三題を選択して答えよ。

・すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・答案は解答用紙の授業科目の欄に選択した問題番号を必ず明記し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

・解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

専門物理 I　量子力学 B

問題

1 次元調和振動子のハミルトニアンは以下のように表される。

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

ここで $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ は運動量の演算子、$\hat{x}$ は位置の演算子であり、次の交換関係を満たす。

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{2}$$

1. 演算子 $\hat{a}$ を次のように定義する。

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m}}\hat{p}\right) \tag{3}$$

このとき、$\hat{a}$ とそのエルミート共役の演算子 $\hat{a}^\dagger$ の交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \tag{4}$$

を求めよ。

2. 1 次元調和振動子のハミルトニアンは $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を使って

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

と表されることを示せ。

3. $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ とし、$\hat{N}$ の固有関数を φ_n とする。

$$\hat{N}\varphi_n = \hat{a}^\dagger\hat{a}\varphi_n = n\varphi_n \tag{6}$$

(a) $\phi_n = \hat{a}^\dagger\varphi_n$ とすると、

$$\hat{N}\phi_n = (n+1)\phi_n \tag{7}$$

となることを示せ。

(b) $\psi_n = \hat{a}\varphi_n$ とすると、

$$\hat{N}\psi_n = (n-1)\psi_n \tag{8}$$

となることを示せ

専門物理 II　統計力学

単原子分子理想気体をカノニカル統計で考える。理想気体とは，気体分子がエネルギーとして運動エネルギーのみを持ち，分子間に相互作用が働かない気体のことである。特に，単原子分子理想気体の場合には，運動エネルギーは $\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}$ と書ける。ただし，m は分子の質量，$\boldsymbol{p}$=(p_x, p_y, p_z) は分子の持つ運動量である。以下の問いに答えよ。

(1) 分子 1 個の分配関数の表式 $z_1 = \frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$ を導出せよ。ただし，V は系の体積，$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$，$T$ は温度，k_{B} はボルツマン定数である。また，ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ap^2}dp = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を使ってよい。

(2) 分子同士が区別不可能として，N 分子系の分配関数 Z を z_1 と N を使って書け。

(3) N 分子系のエネルギー期待値 $E(= \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z)$ を計算せよ。

(4) N 分子系のヘルムホルツの自由エネルギー $F(= \quad \frac{1}{\beta}\ln Z)$ を計算し，その表式が

$$F = \quad Nk_{\mathrm{B}}T\left[\log \quad \frac{V}{N} \quad +1+\frac{3}{2}\log \quad \frac{2\pi m}{\beta h^2} \quad \right]$$

となることを示せ。
ただし，スターリングの公式 $\log N! \sim N\log N \quad N$ を使ってよい。

(5) N 分子系のエントロピー S を計算せよ。

(6) N 分子系の圧力 p を計算せよ。

(7) (6) の結果から理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ が導出されることを示せ。ただし，$R(= N_{\mathrm{A}}k_{\mathrm{B}})$ は気体定数，n は気体のモル数，N_{A} はアボガドロ数である。

専門物理 III

1. S 系 $(ct,\, x,\, y,\, z)$ から S$'$ 系 $(ct',\, x',\, y',\, z')$ へのローレンツ変換を

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \quad\gamma\beta & 0 & 0 \\ \quad\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

で与える。ただし、β と γ は、それぞれ S 系に対する S$'$ 系の速さを光速でわったものとそのローレンツ因子である。このとき、電磁場 $\vec{E}$, $\vec{B}$ は以下のように変換される。

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y \quad \beta c B_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y) \end{cases} , \qquad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{\beta}{c} E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z \quad \frac{\beta}{c} E_y) \end{cases}$$

このことを用いて以下の問に答えよ。

(i) $\vec{E}^2 \quad c^2\vec{B}^2$, $\vec{E}\cdot\vec{B}$ はともにローレンツ不変となることを示せ。

(ii) ガウスの法則 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ および、磁荷なしの法則 $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ がローレンツ不変となることを示せ。

2. ガレージがあり、そこに車が入ることを考える。ガレージと車の固有長は ℓ_0 と等しく、車が走って入庫する。ガレージ静止系から見ると、走っている車はローレンツ収縮をするからガレージに車は収まってしまう。一方で、車の静止系からみると、ガレージはローレンツ収縮をするから車はガレージに収まらない。これは矛盾か? 理由とともに述べよ。(理由を述べずに矛盾するかしないかだけ答えたものについては採点しない。)

専門物理 IV

実力試験　物性物理概論　固体物理

以下の文章の空欄にあてはまる最も適切な語句または数字を解答群から選んで記号で答えると共に、以下の問(a)および問(b)に答えよ。

固体結晶の特徴は原子や分子の周期的配列に由来する。この周期的配列を表す格子上に基本ベクトルを取り、その $\boxed{\quad(1)\quad}$ 倍だけ格子をずらしても結晶全体の性質は不変である。このような結晶の対称性を $\boxed{\quad(2)\quad}$ 対称性と呼ぶ。有限温度では、熱運動のため固体結晶中の原子や分子はその平衡位置からずれようとし、$\boxed{\quad(3)\quad}$ 振動と呼ばれる振動が結晶中を伝播する。同種原子からなる 2 原子分子の固体結晶を 1 次元結晶格子の調和振動子モデルで調べてみよう。格子定数を a、分子内のばね定数を K_1、分子間のばね定数を K_2（$<K_1$ とする）、各原子の質量を M とすると、各原子に対する運動方程式から、$\underline{\omega = (K_1 + K_2)/M \pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1K_2\cos ka}/M}_{\text{(a)}}$ という 2 種類の振動解を得る。ここで、複合の＋の方を $\boxed{\quad(4)\quad}$ モードと呼び、－の方を $\boxed{\quad(5)\quad}$ モードと呼ぶ。このうち、低温格子比熱の温度依存性に寄与するのは $\boxed{\quad(6)\quad}$ モードであり、$\boxed{\quad(7)\quad}$ 温度よりも十分に低い温度領域では格子比熱が絶対温度の $\boxed{\quad(8)\quad}$ 乗に比例することが知られている。一方、$\boxed{\quad(7)\quad}$ 温度よりも十分に高い温度領域では格子比熱が $\boxed{\quad(9)\quad}$ 振舞いが現れ、デュロン・プチの法則と呼ばれている。さらに、金属結晶では格子比熱に加え、$\boxed{\quad(10)\quad}$ も比熱に寄与する。この比熱は十分に低い温度領域で絶対温度の $\boxed{\quad(11)\quad}$ 乗に比例することが知られている。この温度依存性は、金属結晶中の$\underline{自由電子の \boxed{\quad(12)\quad} エネルギー}_{\text{(b)}}$における $\boxed{\quad(13)\quad}$ を実験的に調べる手法としてよく用いられている。

問(a)　下線部(a)で与えられる分散関係を第一ブリルアンゾーンの範囲内で図示せよ。

問(b)　下線部(b)のエネルギーを３次元自由電子の電子数密度 n を用いて表せ。ただし、自由電子の質量を m とする。

解答群：（ア）アインシュタイン　（イ）ドゥルーデ　（ウ）ブロッホ　（エ）デバイ
（オ）フェルミ　（カ）電子　（キ）格子　（ク）光子　（ケ）縦　（コ）横
（サ）音響　（シ）光学　（ス）回転　（セ）並進　（ソ）反転　（タ）有理数
（チ）整数　（ツ）小数　（テ）０　（ト）１　（ナ）２　（ニ）３　（ネ）５
（ノ）絶対温度に比例する　（ハ）絶対温度に反比例する（ヒ）温度増大と共に増加する
（ヘ）温度増大と共に減少する　（ホ）絶対温度に依らず一定となる　（マ）速度
（ミ）位置　（ム）バンドギャップ　（メ）状態密度　（モ）波動関数

専門物理　V

[1] 図 1 の回路に、以下の電圧 $v_{in}(t)$:

$$v_{in}(t) = \begin{cases} V & t \le 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

（$V > 0$）が入力された場合の出力電圧 $v^C(t)$ 及び $v^R(t)$求めよ。ただし、回路に接続されている抵抗の大きさは R、コンデンサの静電容量の大きさは C とする。

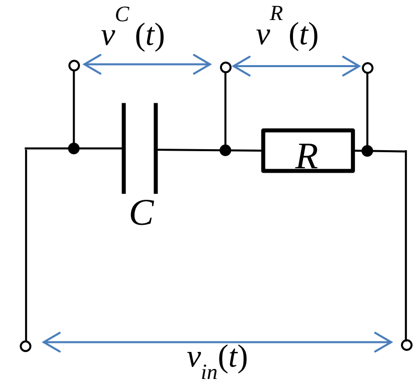

図 1　　回路

[2] 図 2 の回路について以下の問に答えよ 。

(2-1) 端子 AB 間の電位差 v_i, 負荷 Z_i を流れる電流 i_i, 端子 CD 間の電位差 v_o, 及び負荷 Z_L を流れる電流 i_o を図中の記号のみを用いて式で表せ。

(2-2) 信号源の出力イオンピーダンスと増幅回路の入力インピーダンスは整合条件を満たしているとする。両インピーダンスの関係を式で表せ。

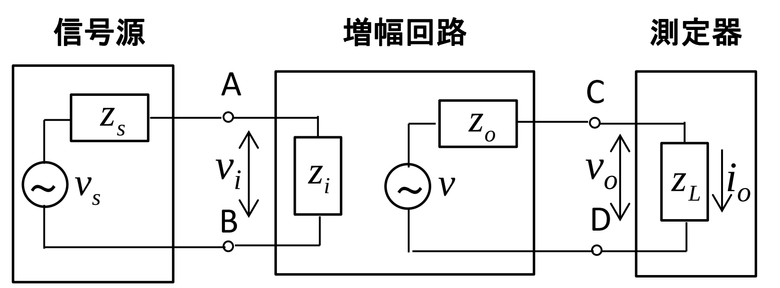

図 2 信号源・増幅回路・測定器 から成る回路

(2-3) 増幅回路の出力電圧を出来るだけ大きな値として検出する場合、増幅回路の出力インピーダンスと測定器の入力インピーダンスの間に成り立つべき関係を式で表せ。

[3] 図 3 はエミッタ接地バイポーラ・トランジスタの自己バイアス回路である。図中の記号は I が電流値, R が抵抗値, V が電位差などの値を表す。

(3-1) バイアス電圧 V_{cc} を I_A, I_B, R_A, R_B を用いて表せ。

(3-2) 本回路では $I_A >> I_B$ となるように R_A と R_B の値が設定されている。この帰着として成り立つ、V_B を与える最も適切な近似式を記し、本設定により本回路にもたらされる特性を一文で説明せよ。

(3-3) さらに、V_B をエミッタ抵抗値 R_E など図中の記号を用いて表せ。

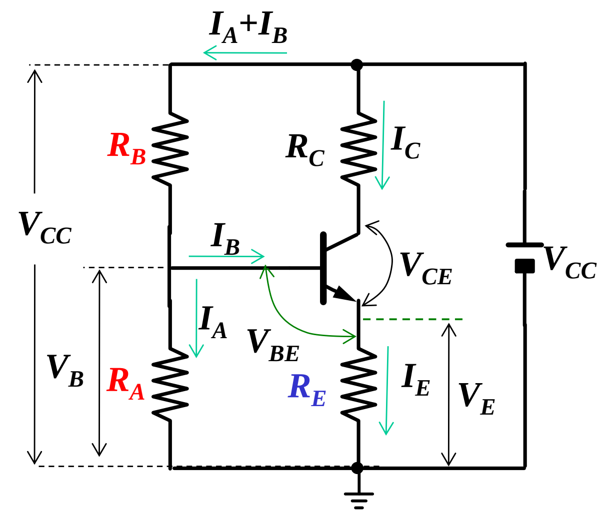

図 3 自己バイアス回路

(3-4) トランジスタの温度が変化し、その結果 Ic が増加した。この後の本回路の動作を簡単に説明せよ。