2012年度実力テスト（専門物理問題）

2013年1月10日（木）

17:25～19:25　120分

解答上の注意

・問題は全部で五題あり、そのうち三題を選択して答えよ。

・すべての解答用紙に学生番号・氏名を記入すること。

・答案は解答用紙の授業科目の欄に選択した問題番号を必ず明記し、一枚の解答用紙に一問の答案を記入すること。ただし、解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。その場合にはその旨を表面に明記すること。

・解答用紙はすべて提出すること。解答用紙が綴じてある場合には綴じたままの状態で提出すること。

次のハミルトニアンで表される 1 次元調和振動子を考える。

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$$

ここで、$\hat{x}, \hat{p}$ は座標と運動量の演算子であり、これらの間には正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ が成り立つ。ここで、生成演算子 $\hat{a}^\dagger$、消滅演算子 $\hat{a}$ を次のように定義する。

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m}}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m}}\hat{p}\right)$$

1. $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換関係は

   $$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \qquad [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -1$$

   となることを示せ。

2. ハミルトニアンは生成・消滅演算子を用いて

   $$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

   と表されることを示せ。

3. $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有値 n の規格化された固有関数を $\phi_n(x)$ とすると、

   $$\hat{a}^\dagger\hat{a}\phi_n(x) = n\phi_n(x), \qquad \hat{\mathcal{H}}\phi_n(x) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_n(x)$$

   である。このとき (2) で示した交換関係を用いて

   $$\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\phi_n(x) = (n-1)\hat{a}\phi_n(x)$$
   $$\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\phi_n(x) = (n+1)\hat{a}^\dagger\phi_n(x)$$

   となることを示せ。

4. 状態が $\phi_n(x)$ で与えられるとき、座標の期待値 $< x >$、および運動量の期待値 $< p >$ を表す式を $\phi_n(x), \phi_n^*(x), \hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。さらに $\phi_n(x)$ は正規直交性を持つことを利用し、その期待値 $< x >, < p >$ を求めよ。

熱・統計力学 2012

1. 角振動数 ω の 1 個の調和振動子系を考える。この振動子のエネルギー固有値は $\hbar\omega(n+1/2)$ で与えられる。ここで $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの、n は $0, 1, 2, \cdots$ の値をとる整数である。この振動子が温度 T の熱平衡状態にあるときのこの系の分配関数を求めよ。

2. この振動子の温度 T におけるエネルギー平均値が $\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ をもちいて $\hbar\omega(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} \quad 1} + \dfrac{1}{2})$ と表される事を示せ。

3. 一辺の長さ L の立方体中の電磁場は波数 $\vec{k}$ と偏光 λ をもつ電磁波の集合として表され、各電磁波のエネルギーは偏光によらず、角振動数 $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ の調和振動子のエネルギーに等しい。角振動数が ω と $\omega + \mathrm{d}\omega$ の間にある電磁波のモードの数を $D(\omega)\mathrm{d}\omega$ とすると
$$D(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$$
であることを示せ。但し $V = L^3$ は体積を表す。

4. 温度 T における電磁場のエネルギー平均値（但し零点エネルギーを除く）が T^4 に比例することを示せ。

専門物理 III

慣性系 $\mathrm{S}(ct,\ x,\ y,\ z)$ から慣性系 $\mathrm{S}'(ct',\ x',\ y',\ z')$ へのローレンツ変換を

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

で与えるとき、以下の問に答えよ。

1. 電磁場 $\vec{E}$, $\vec{B}$ は以下のように変換される。

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y \quad \beta c B_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y) \end{cases} , \qquad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{\beta}{c} E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z \quad \frac{\beta}{c} E_y) \end{cases}$$

   このとき、$\vec{E}^2 \quad c^2\vec{B}^2$, $\vec{E}\cdot\vec{B}$ はともにローレンツ不変となることを示せ。

2. (i) S 系で測って、速度 $v_0 = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ で x 軸方向へ運動する物体がある。S' 系で測って、この物体の速度が $v' = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ であった。$\beta' = v'/c$ を $\beta_0 = v_0/c$ と β で表せ。

   (ii) S 系に対して x 軸方向に速度 β で物体 1 が運動し、その物体 1 に対して、x 軸方向に速度 β で物体 2 が運動し、さらに、その物体 2 に対して、x 軸方向に速度 β で物体 3 が運動し、、、ということを n 回繰り返す。物体 n の S 系に対する速度を β_n とするとき、β_n を β_{n-1} と β で表す漸化式を求めよ。

   (iii) (ii) で与えた漸化式を解き、β_n の一般項を求めよ (ヒント:$\alpha_n = (1 \quad \beta_n)/(1+\beta_n)$ とおけ)。特に、$n \to \infty$ のとき、β_n はどうなるか。

専門物理　Ⅳ（物性物理概論　固体物理）

以下の文章を読み、設問（１）～（３）に答えよ。

固体結晶では原子や分子が周期的に配列している。この周期的配列を表す格子上に基本ベクトルを取り、その整数倍だけ格子をずらしても結晶全体の性質が不変となる性質を $\boxed{\quad (a) \quad}$ 対称性と呼ぶ。これを数学的に表すと結晶格子の格子ベクトル $\boldsymbol{R}$ と逆格子ベクトル $\boldsymbol{K}$ との間に、$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{K} = \boxed{\quad (b) \quad}$ ×(整数)という関係が成り立つ。

次に、固体中の自由電子を古典的な理想気体と考える古典論（Drude 理論）では、自由電子の平均の速さは絶対温度の $\boxed{\quad (c) \quad}$ 乗に比例するため、絶対零度では全ての金属が $\boxed{\quad (d) \quad}$ になってしまうと考えられる。一方、自由電子をフェルミ統計に従うフェルミ気体と考える量子論（Sommerfeld 理論）では、基底状態（すなわち、絶対零度）における３次元自由電子の速さは、$\boxed{\quad (e) \quad}$ の $\boxed{\quad (f) \quad}$ 乗に比例することが示される。さらに、結晶中の周期的ポテンシャルの影響を量子力学的に考慮したバンド理論では、波数 $\boldsymbol{k}$ をもつ電子の速度は、エネルギーバンド構造を表す $E(\boldsymbol{k})$ を用いて $\boldsymbol{v} = \boxed{\quad (g) \quad}$ と表され、電子のバンド有効質量は $m = \boxed{\quad (h) \quad}$ と表される。

（１）　上記の文章の空欄(a)～(h)にあてはまる最も適切な語句、数値または式を答えよ。

（２）　ほとんど自由な電子模型による１次元系のエネルギーバンド構造を拡張ゾーン形式で第二ブリルアンゾーンまで定性的に図示せよ。

（３）　固体電子のバンド理論の立場から、金属と絶縁体（厳密にはバンド絶縁体）の違いを説明せよ。

専門物理 V（電子回路）

[1] 図 1 に示す、理想的なオペアンプを使った増幅回路について以下の問いに答えよ。

(1) 理想的なオペアンプの入力インピーダンスについて知るところを記せ。

(2) 理想的なオペアンプの出力インピーダンスについて知るところを記せ。

(3) 理想的なオペアンプの（電圧）増幅率 A について知るところを記せ。

(4) 図中の電流 i_s, i_f, 及び i_i の間に成り立つ関係を、最も簡単と考えられる形の式で表せ。なお、複数の式で表すことは可である。

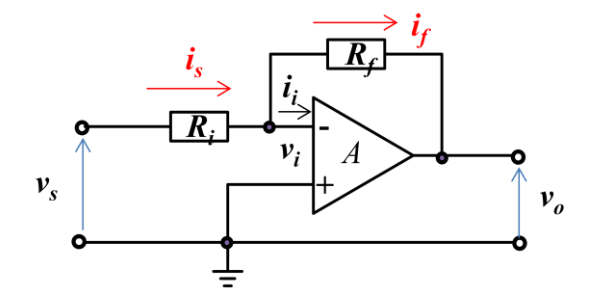

図 1　オペアンプを使った増幅回路

(5) 図のオペアンプを使った増幅器の電圧増幅率 A_v を R_i と R_f のみを使って最も簡単と考えられる式で表せ。なお、符号に注意すること。

[2] 以下の問に答えよ。

(1) 図 2-1 に示す様な、三つの抵抗からなる四端子回路のインピーダンス（Z）行列

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.1$$

の各要素を求めよ。ただし i_1, v_1 および i_2, v_2 はそれぞれ入力側および出力側の電流および電圧である。

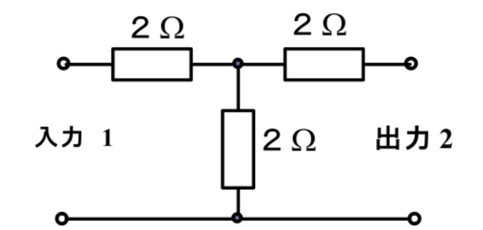

図 2-1 四端子回路

　一方、図 2-2 はエミッタ接地バイポーラトランジスタの基本動作を表す簡単化した等価回路である。

(2) 図中の端子 1, 2 及び 3 はトランジスタのどの端子（ベース、コレクタ、エミッタ）に相当するか。

(3) β のおおよその値を記せ。

(4) ハイブリッド (H) 行列は入力側の電流 i_1 及び出力側の電圧 v_2 を用いて入力側の電圧 v_1 と出力側の電流 i_2 を表す場合に用いる 2 × 2 の行列である。これを式で表せ（式 (2.1) を参照し、同様の式を記せ）。

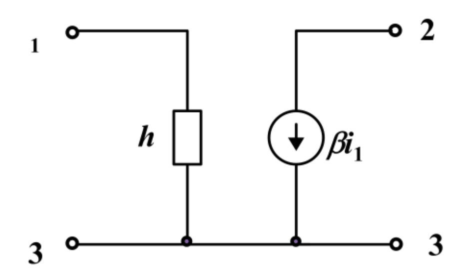

図 2-2 簡易等価回路

(5) (4) で求めたハイブリッド行列を図中の記号 (h 及び β) を用いてあらわせ。