6

上端が固定された鉛直方向に伸び縮みするバネ定数 k のバネがあり、下端に質量 m の質点が付いている。鉛直上方を z 軸の正の方向とし、釣り合いの位置にあるときの質点の位置を原点とする。質点は、速度 v で動くとき $-2m\gamma v$ の抵抗力を受ける。$\omega = \sqrt{k/m}$ とし、重力加速度の大きさは g とする。以下の問に答えよ。

問 1. まず $\gamma = 0$ の場合を考える。

(1) この系の一般解を求めよ。

(2) $t = 0$ で釣りあいの位置にある質点に $-z$ 方向に大きさ v_0 の初速度を与えた。その後の質点の位置 z と速度 v を時刻 t の関数として表せ。

(3) 運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ とポテンシャルエネルギー $\frac{1}{2}kz^2$ を求め、この和が一定となること、すなわち力学的エネルギー保存則を示せ。

問 2. 次に $\gamma > 0$ の場合を考える。

(1) この系の一般解を求めよ。

(2) $t = 0$ で釣りあいの位置にある質点に $-z$ 方向に大きさ v_0 の初速度を与えた。$\omega > \gamma$、$\omega < \gamma$ の 2 通りの場合について、その後の質点の位置 z と速度 v を時刻 t の関数として式で表し、さらに z と t の関係をグラフで表せ。

問 3. $\gamma = 0$ のとき、この質点に z 方向の周期的に変動する外力 $F(t) = A\sin(\omega_0 t)$ を加えた。

(1) このときの質点の運度方程式の一般解は、外力が加わっていない場合の一般解と外力がある場合の特解の和として表される。後者は外力と同じ振動数で振動する解である。外力がある場合の一般解を求めよ。ただし $\omega \neq \omega_0$ とする。

(2) ω と ω_0 が近いが異なる値を取る場合を考える。外力が加わっていない場合の一般解も振動する解である。その振幅と、外力がある場合の特解の振動の振幅が同じ場合に、系はうなりを生じることを示せ。必要なら次の公式を用いよ。
$\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$

7

無限直線電流 I(この電流を z 軸とする) の作る磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ をビオ・サバールの法則を使って求め，以下の問に答えなさい．

(i) z 軸が中心を貫く $x-y$ 平面上の半径 a の円について半時計回りに以下の一周積分

$$\oint_{\text{半径 } a \text{ の円}} \vec{B}\cdot\hat{t}ds \qquad \text{ここで}\hat{t}\text{は積分方向を向いた円の接線単位ベクトル}$$

を求めなさい．

(ii) この電流の作る $\vec{B}$ についてその回転 ($rot\vec{B}$=$\nabla\times\vec{B}$) を求めなさい。

(iii)(ii) の結果はストークスの定理を満たしていないように見える。この結果について、整合性を得るためには、どのようにしたらよいか。

以下に必要と思われる式を示す。

曲線上を流れる電流 I の作る $\vec{B}$(ビオ・サバールの法則):

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\hat{t}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}ds'$$

ストークスの定理:

$$\oint_{\text{閉曲線 } c}\vec{A}\cdot\hat{t}ds=\int_{c\text{ を縁とする面}}(\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}dS$$

8

以下の問に答えよ

問 1　一次元リング上を運動する自由粒子を考える。粒子の質量を m、リングの円周長を L とする。リング上の粒子の位置座標 x を、円周に沿った道のりで定義する。このとき、定常状態をあらわす波動関数は $\varphi(x) = N\exp(ikx)$ で表される。

1-1) 規格化定数 N を求めよ。

1-2) 周期的境界条件を課すことにより、k の取り得る値を求めよ。

1-3) $\varphi(x)$ が運動量演算子 $\hat{p}$ および運動エネルギー演算子 $\hat{T} = \hat{p}^2/(2m)$ の同時固有関数であることを示せ。

1-4) 交換積 $[\hat{p}, \hat{T}]$ を求めよ。

問 2　角運動量演算子 $\hat{\vec{L}}$ について、交換関係 $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$、$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$、$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$ が成り立つ。また、極座標を用いて $\hat{L}_z = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$（ただし $0 \leq \phi \leq 2\pi$）で表される。以下では、演算子 $\hat{L}_z$ の固有値を L_z と表すものとする。

2-1) 方程式 $\hat{L}_z Y = L_z Y$ を解いて、固有関数 Y を求めよ。

2-2) 上で求めた解に境界条件を課すことにより、L_z を求めよ。

2-3) ある状態の波動関数が、上で求めた固有関数 Y で表される場合を考える。ただし $L_z \neq 0$ とする。この状態について、$\hat{L}_x$ や $\hat{L}_y$ を観測するとどうなるか議論せよ。

問 3　ある調和振動子のハミルトニアンを $\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$ で表す。ただし $\omega > 0$ である。ここで数演算子 $\hat{N}$ は生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ および消滅演算子を $\hat{a}$ を用いて $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ で定義される。$\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ は互いにエルミート共役であり、交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ が成り立つ。

3-1) φ が $\hat{N}$ の固有関数で、$\hat{N}\varphi = n\varphi$ が成り立つとする。ただし固有値 $n \neq 0$ とする。この φ に対して、$\varphi' = \hat{a}\varphi$、$\varphi'' = \hat{a}^\dagger\varphi$ とする。

φ' および φ'' が $\hat{N}$ の固有関数であることを示し、それぞれの固有値を求めよ。

3-2) 関数 φ_0 は $\hat{a}\varphi_0 = 0$ を満たすものとする。このとき、φ_0 はシュレディンガー方程式の解であることを示せ。

3-3) 上記の関数 φ_0 がこの調和振動子の基底状態を表す波動関数であることを示せ。必要ならば、この調和振動子のエネルギー固有値が負にならないことを用いよ。

9

三つの量子状態（状態 1,2,3) を取り得る原子があり，それぞれのエネルギーを $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varepsilon_3 = \varepsilon$ とする（状態 2 と 3 は同じエネルギーを持つ)。この原子が N 個配列した系を考える（この場合，原子同士はその位置座標で区別できる)。温度を T として，以下の問いに答えよ。

(1) N=1 の場合の分配関数 Z_1 を書け。

(2) N=n の場合の分配関数 Z_n を書け。

(3) N=1 の場合のエネルギー期待値 $E_1 (= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1)$ を計算せよ。

(4) N=1 の場合のエネルギー分散 $V_1 (= \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z_1)$ を計算せよ。

(5) N=1 の場合の (定積) 比熱 $C_1 = \frac{dE_1}{dT}$ を計算せよ。

(6) 比熱は示量性の物理量であることに注意して $N = n$ の場合の (定積) 比熱 C_n を求めよ。

10

以下の問１および問２の両方に答えよ。

[問１]　質量の異なる２種類のイオン（A イオンと B イオン）からなる１次元イオン結晶の格子振動を調和振動子模型で考える。格子定数を a、A イオンと B イオンの質量を各々M_A、M_B とする。イオン間のばね定数 K が共通である場合、格子振動の分散 $\omega(k)$ が次式で与えられることを用いて、以下の問いに答えよ。

$$\omega(k) = \left[K\left(\frac{1}{M_\mathrm{A}} + \frac{1}{M_\mathrm{B}}\right) \pm K\sqrt{\frac{1}{M_\mathrm{A}^2} + \frac{1}{M_\mathrm{B}^2} + \frac{2}{M_\mathrm{A}M_\mathrm{B}}\cos ka} \right]^{\frac{1}{2}}$$

（１）$M_\mathrm{A} > M_\mathrm{B}$ のとき、$\omega(k)$ を第一ブリルアンゾーンの範囲内で定性的に図示せよ。

（２）時刻 t における n 番目の A イオンと B イオンの変位を、各々

$$u_\mathrm{A}(na, t) = A\exp[i(kna - \omega t)]、\quad u_\mathrm{B}(na, t) = B\exp[i(kna - \omega t)]$$

と書くとき、上の分散関係を導くための運動方程式を示せ。

（３）（２）で得られる運動方程式と分散関係から、$k = 0$ における各イオンの変位の振幅比 B/A を求めよ。また、この結果を用いて音響モードと光学モードで $k = 0$ における振動がどのように異なるのかを簡潔に説明せよ。

[問２]　格子定数が a の単純正方格子で与えられる３次元結晶中のブロッホ電子のエネルギー $E(k)$ が、強束縛電子模型を用いて次式で与えられるとき、以下の問いに答えよ。ただし、結晶は１種類の原子からなるとし、孤立した原子中の電子のエネルギー固有値を ϵ_n、結晶中の周期ポテンシャルによる変化を考慮したエネルギー定数を A および t とおく。

$$E(k) = \epsilon_n - A - 2t(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a)$$

（１）[110] 方向のエネルギー分散を第一ブリルアンゾーンの範囲内で図示し、そのエネルギーバンド幅と $k = 0$ における電子の有効質量を求めよ。

（２）単位胞（または基本単位格子）当りの電子の総数が奇数の場合と偶数の場合を考え、各場合に結晶の電子状態が金属となるのか、あるいは絶縁体となるのかを理由と共に簡潔に説明せよ。

11

質量 m_{e}、運動量の大きさ p の陽電子 e^+ が質量 m_{e} の静止した電子 e^- と衝突し、質量 $m_{\pi^\pm}$ の $\pi^+\pi^-$ 対が作られた $(e^+e^- \to \pi^+\pi^-)$。以下の問に答えよ。
必要ならば、$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} > m_{\mathrm{e}}$ を用いて良い。

問 1. 陽電子の全エネルギー E を p と m_{e} 等を用いて表せ。

問 2. 重心系での電子・陽電子のエネルギー E' と運動量の大きさ p' は以下で与えられることを示せ。

$$E' = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{e}}c^2(E + m_{\mathrm{e}}c^2)}{2}} \quad , \qquad c\,p' = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{e}}c^2(E - m_{\mathrm{e}}c^2)}{2}} \tag{1}$$

問 3. この反応が起こるためには、重心系で $E' > m_\pi c^2$ が必要であることを説明せよ。

問 4. この反応が起こるために必要な最小の p を求めよ。

12

各自が学部時代に研究しているテーマについて、それを研究対象とした理由や学術的・社会的な意義、及び今後の展望などについて、簡潔且つ具体的に論じよ。