1

R を可換環，I を R のイデアルとする．

(1) イデアルの定義を書け．

(2) I が R の乗法の単位元 1 を含むなら $I = R$ である．これを示せ．

(3) 環 $\boldsymbol{Z}/6\boldsymbol{Z}$ の零因子を全て求めよ．ただし $\boldsymbol{Z}$ は整数環である．

(4) 環 $\boldsymbol{Z}/6\boldsymbol{Z}$ の零因子全体の集合は $\boldsymbol{Z}/6\boldsymbol{Z}$ のイデアルではない．これを示せ．

2

曲面

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \log \frac{\cos v}{\cos u}$$

$(0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2})$ について，次の問に答えよ．

(1) ガウス曲率を求めよ．

(2) 平均曲率を計算し，極小曲面になることを証明せよ．

3

次の波動方程式の初期値・境界値問題を解け．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \pi,\ 0 < t)$$

$$\text{境界条件} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2\sin^2 x$$

4

(1) 次の方程式を満たす複素数 $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ．実数値の三角関数，指数関数，対数関数などは自由に用いて解答してよい．

(i) $z^3 + 8 = 0$

(ii) $\sin z + 2i = 0$

(2) 次の複素積分を計算せよ．ただし，積分路は正の向きに向きづけられているものとする．また，コーシーの積分定理・公式や留数定理などを用いる場合には，まず定理を述べ，どのように用いたのかを説明すること．

(i) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{iz}}{z-\pi}\,dz$

(ii) $\displaystyle\int_{|z-\pi|=1} \frac{e^{iz}}{z-\pi}\,dz$

(iii) $\displaystyle\int_{|z-\pi|=1} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^4}\,dz$

5

関数 $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$d(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \qquad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$$

と定義する．

(1) $(\mathbf{R}^2, d)$ は距離空間になることを示せ．

(2) 原点 $o = (0,0) \in \mathbf{R}^2$ の ε 近傍

$$B_\varepsilon(o) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid d(x,o) < \varepsilon\}$$

を xy 平面上に図示せよ．

(3) $\mathbf{R}^2$ の部分集合

$$A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1\}$$

は距離空間 $(\mathbf{R}^2, d)$ の開集合であることを示せ．