6

質量 m の質点が (x, y) 平面内を 2 次元的に運動している。ポテンシャルは $V(x,y) = \dfrac{k}{2}(x^2 + y^2)$ で与えられる。ここで k は正の定数である。

(1) この系のラグランジアンとラグランジュの運動方程式を記せ。

(2) この質点のラグランジュの運動方程式，またはニュートンの運動方程式を解き，この質点の軌跡を求めよ。ただし初期条件を $t = 0$ で $x = C_1$，$y = C_2$，$\dot{x} = C_3$，$\dot{y} = C_4$ とする。

(3) 角運動量の大きさ $L = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ が保存することを示せ。

(4) この質点の軌跡が円となるための C_1, C_2, C_3, C_4 の満たすべき条件を求めよ。

7

以下のガウスの法則

$$\int_{\text{閉曲面}\,S} \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{S\,\text{内部}} \rho(\vec{r})dV$$

ここで $\hat{n}$ は閉曲面 S から外に向かう法線単位ベクトル

dS は S の面 (積) 要素、$\rho(\vec{r})$ は電荷密度

を使って

(1) 無限に広い厚さ $2d$ の板に一様に分布した電荷 (電荷密度 ρ_0[C/m^3]) の作る電場求めて下さい。

(2) この板が x-y 平面に平行で、中心面が (0,0,D) にあるときの電場を (1) の結果を使って求めて下さい。

$\boxed{8}$ 質量 m の粒子がばね定数 $k = m\omega^2$ のばねでつながれている一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

で与えられる。基底状態の波動関数は $\varphi(x) = N\exp(-ax^2)$ と表される。基底状態のエネルギーを E_0 とする。以下の問に答えよ。

1. 規格化定数 N を定めよ。
2. 期待値 $\langle x \rangle$ および $\langle x^2 \rangle$ を求めよ。
3. $\hat{\mathcal{H}}\varphi(x)$ を計算せよ。
4. 上の結果を用いて、$\varphi(x)$ がハミルトニアンの固有関数となるように定数 a を定めよ。
5. E_0 を求めよ。
6. この粒子が観測され得る領域（粒子の存在確率密度がゼロではない領域）を、同じエネルギー $E = E_0$ をもつ古典力学系との比較を含めて議論せよ。
7. $E_0 > 0$ である理由を説明せよ。

なお、必要ならば、積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(-sx^2) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$、$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \exp(-sx^2) = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ を用いても良い。

9

固体振動をミクロカノニカル統計を用いて考察してみよう。N 個の原子が格子点上に並んでいる場合を考える。ただし，原子一個の振動エネルギーは，零点振動を無視すると $\epsilon_n = \hbar\omega n$ と与えられるとする。ここで n は0以上の整数である。以下の問いに答えよ。

(1) 系の全エネルギーが E である時，系全体のエネルギー量子（$\hbar\omega$）の個数 M はいくつか？

(2) この時，系が取り得る状態の数（状態数）W は，全部で M 個あるエネルギー量子を N 個の原子に分配する場合の数で与えられる。状態数 W を N と M を使って書き下せ。

(3) この時のエントロピー S は N と M を用いて，
$S = k_{\mathrm{B}}[(N+M)\log_e(1+\frac{M}{N}) - M\log_e(\frac{M}{N})]$ と与えられる。導出過程を示せ。ただし，必要ならば十分大きな正整数 N について成り立つスターリングの公式 $\log_e N! = N\log_e N - N$ を用いよ。

(4) エントロピー S をエネルギー E の関数として書き下せ。

(5) エントロピー S をエネルギー E で微分した表式 $\frac{dS}{dE}$ を計算せよ。

(6) $\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$ を解いて，温度 T の関数として E を求めよ。

10

以下の問 1 および問 2 の両方に答えよ。

[問 1]　電子の電荷を $-e(<0)$、質量を m、固体中の自由電子密度を n、散乱時間を τ、真空の誘電率を ϵ_0 として以下の問いに答えよ。

（1）物質中の Maxwell 方程式（$\dfrac{\partial \boldsymbol{H}(t)}{\partial t} = \boldsymbol{j}(t) + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t}$）において、誘電体は $\boldsymbol{j}(t) = 0, \boldsymbol{D}(t) = \tilde{\epsilon}(\omega)\epsilon_0 \boldsymbol{E}(t)$ で表され、金属は $\boldsymbol{j}(t) = \tilde{\sigma}(\omega)\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{D}(t) = \epsilon_0 \boldsymbol{E}(t)$ で表される。このことを用いて、複素誘電率 $\tilde{\epsilon}(\omega)$ と複素電気伝導度 $\tilde{\sigma}(\omega)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。ただし、$\boldsymbol{H}(t), \boldsymbol{j}(t), \boldsymbol{D}(t), \boldsymbol{E}(t)$ の時間依存性はすべて $e^{-i\omega t}$ で与えられるものとする。

（2）Drude 理論では複素電気伝導度の周波数依存性が、$\tilde{\sigma}(\omega) = \dfrac{(ne^2\tau/m)}{1 - i\omega\tau}$ で与えられる。このとき、問 1 の結果とプラズマ周波数 $\omega_p (\equiv \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m})$ を用いて、複素誘電率の周波数依存性 $\tilde{\epsilon}(\omega)$ を求め、$\omega\tau \gg 1$ の場合、$\tilde{\epsilon}(\omega) \sim 1 - (\omega_p/\omega)^2$ となることを示せ。

（3）固体の光学反射率は複素誘電率を用いて、$R(\omega) = \left| \dfrac{1 - \sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)}}{1 + \sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)}} \right|$ で与えられる。$\omega\tau \gg 1$ の場合、$\omega < \omega_p$ と $\omega > \omega_p$ で光学反射率がどのように変化するか図を用いて説明せよ。

[問 2]　ある 2 原子分子の 1 次元結晶について以下の問いに答えよ。ただし、各原子の質量を M、分子内および分子間のばね定数を各々 K_1 および K_2（$K_1 > K_2$）とし、格子定数を a とする。

（1）結晶全体を伝搬する格子振動の分散が、

$$\omega_{\pm}^2(k) = \frac{K_1 + K_2}{M} \pm \frac{1}{M}\sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1K_2\cos ka}$$

で与えられるとき、$\omega_+(k)$ および $\omega_-(k)$ を第一ブリルアンゾーンの範囲内で図示し、音響モードと光学モードを明示せよ。

（2）固体の格子比熱が温度減少と共に減少する振る舞いを量子論的に説明したデバイ模型とアインシュタイン模型について、問 1 で図示した分散関係に関係付けて両者の違いを説明し、各模型で低温領域での格子比熱の温度依存性がどのように異なるのか述べよ。

11

放射性元素の原子の崩壊を考える。時刻 t での放射性物質の原子数を$N(t)$とし、単位時間あたりにこの原子が崩壊する確率を p とする。

問 1. $N(\tau)=\frac{1}{2}N(0)$となる時間τを半減期とよぶ。τを p を用いて表せ。

放射性元素の具体的な例として、^{40}K を考える。

$$^{40}_{19}\mathrm{K} \to {}^{40}_{20}\mathrm{Ca} + \boxed{}$$

問 2. 原子番号、質量数を考慮し、式中の□を埋めることで核反応式を完成させよ。

問 3. この崩壊の種類を述べよ。

問 4. $^{40}_{19}$Kはまた、$^{40}_{18}$Arに変換することもある。ほとんどは電子捕獲であるが、まれに直接$^{40}_{18}$Arに崩壊する。この崩壊の種類を述べよ。

問 5. $^{40}_{19}$Kの質量は 39.96400u, $^{40}_{18}$Arの質量は 39.96238u である。ここで u は原子質量単位であり，$1u = 1.66054\times10^{-27}$ kg, $u\times c^2 = 1.4924\times10^{-10}$ J、1MeV=1.6×10^{-13}J である。この崩壊で出てくるエネルギーを有効数字二桁で答えよ。

12 現時点で大きな興味を持っておりそれについて研究しようと考える物理学や数理科学、あるいはそれらに基づく科学や技術に関する課題を一つ取り上げ、研究対象とする理由や社会的なものも含めた意義、今後の展望などについて、簡潔且つ具体的に論じよ。