1　次の問に答えよ．

(1) a, b を整数として，$I = \{ax + by \,|\, x, y \in \mathbf{Z}\}$ とする．

(a) $0 \in I$ を示せ．

(b) $n_1, n_2 \in I$ ならば $n_1 \pm n_2 \in I$ であることを示せ．

(c) $n \in I, c \in \mathbf{Z}$ ならば $cn \in I$ であることを示せ．

(2) (a) 集合 G が群であることの定義を述べよ．

(b) 群の例をひとつ挙げ，それが確かに群であることを定義に従って示せ．

2　空間内の曲線 $\boldsymbol{p}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 2e^t)$ について，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $\boldsymbol{p}(t)$ の曲率と捩率を求めよ．

(2) 曲線 $\boldsymbol{p}(t)$ が1つの平面に含まれるかどうかを調べよ．

3　2変数関数 $u(x,t)$ は，$-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ で定義され，x に関して周期 2π の周期関数であるとする．そして，$u(x,t)$ は以下の偏微分方程式，および，初期条件を満足するものとする：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad t > 0),$$

$$\text{初期条件} \quad u(x,0) = \sin^2 x \qquad (-\infty < x < \infty).$$

ここで c は実数の定数とする．このとき，以下の手順に従って $u(x,t)$ 求めよ．

(1) $u(x,\, t)$ の独立変数を $\xi = x - ct$, $\tau = t$ $(\longleftrightarrow\ x = \xi + c\tau, t = \tau)$ と変換する．変換後の関数も $u(\xi,\, \tau)$ と書くことにする．このとき，u_x, u_t を u_ξ, u_τ を用いて表せ．

(2) $u(\xi,\, \tau)$ が満たす偏微分方程式，初期条件 $u(\xi,\, 0)$ を求めよ．

(3) $u(\xi,\, \tau)$ は，ξ に関して周期 2π の周期関数であるので，

$$u(\xi,\, \tau) = \frac{a_0(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(\tau)\ \cos\, n\xi + b_n(\tau)\ \sin\, n\xi\right)$$

とフーリエ級数展開できる．$u(\xi,\, \tau)$ が (2) で求めた偏微分方程式を満たすことを使って，関数 $a_0(\tau)$，および，$a_n(\tau)$, $b_n(\tau)$ $\ (n = 1, 2, \cdots)$ が満たす常微分方程式を求めよ．

(4) (2) で求めた $u(\xi,\, 0)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

(5) (3)，(4) の結果から，$a_0(\tau)$，および，$a_n(\tau)$, $b_n(\tau)$ $\ (n = 1, 2, \cdots)$ を定め，$u(x,t)$ を求めよ．

4 次の問に答えよ．解答には，実変数・実数値関数である

$$e^x,\ \log x,\ \sin x,\ \cos x,\ \ldots$$

などの初等関数を使ってもよい．ただし，なるべく簡潔な形で答えること．

(1) 次の方程式を満たす複素数 z をすべて求め，$z = a + bi\ (a, b \in \mathbf{R})$ の形に表せ．

(i) $z^2 + z + 1 = 0$　　(ii) $z^4 + z^2 + 1 = 0$　　(iii) $\sin z = 2$

(2) 次の複素積分を計算せよ．ただし $|z-a| = r$ は a を中心とする半径 r の円を表し，その向きづけは反時計回りにとる．

(i) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{z^3}{z^2+z+1}\,dz$　　(ii) $\displaystyle\int_{|z+2i|=2} \frac{1}{(z^2+z+1)^2}\,dz$

5 次の問に答えよ．

(1) $f : X \to Y$ を写像とし，A, B を X の部分集合とする．このとき，

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ の元 a, b に対して，$a - b$ が5で割り切れるとき $a \sim b$ と書くことにする．このとき，$\sim$ は同値関係になることを示せ．

(3) 2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の部分集合

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$$

は開集合であることを示せ．