1 以下の問に答えよ．

(1) a, b, c を整数とし，$\gcd(a, b) = 1$ と仮定する．整数 x, y に関する方程式 $ax + by = c$ の一組の解を $x = x_0,\ y = y_0$ とする．このとき，この方程式の任意の解は $x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at\ (t \in \mathbb{Z})$ と書けることを示せ．

(2) (a) 群 G が巡回群であることの定義を述べよ．

(b) G を有限群とする．$|G|$ が素数ならば G は巡回群であることを示せ．

2 曲面

$$x = -v \cos u,\ \ y = -v \sin u,\ \ z = 2u + 1$$

について，次の問に答えよ．

(1) 第一基本形式を求めよ．

(2) 第二基本形式を求めよ．

(3) ガウス曲率および平均曲率を求めよ．

(4) この曲面に含まれる直線を１つあげよ．

3 偏微分方程式の初期値・境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2\pi x \qquad (0 < x < 1,\quad t > 0),$$

境界条件　$u(0, t) = u(1, t) = 0 \qquad (t > 0),$

初期条件　$u(x, 0) = \sin \pi x \qquad (0 < x < 1)$

を考える．

(1) $v(x, t) = u(x, t) + \varphi(x)$（$u(x, t)$ は上記の問題の解）が

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (0 < x < 1,\quad t > 0),$$

境界条件　$v(0, t) = v(1, t) = 0 \qquad (t > 0)$

を満たすように $\varphi(x)$ を定めよ．また，このとき，$v(x, t)$ が満たす初期条件を与えよ．

(2) $v(x, t)$ に関する初期値・境界値問題を解くことによって，$u(x, t)$ を求めよ．

4

(1) n を整数，r を正の実数とするとき，$\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{1}{z^n}\,dz$ を求めよ．ただし，$|z|=r$ は原点を中心とする半径 r の円周上を反時計回りに一回転する曲線である．

(2) $a>0$ に対して $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z^2+1}$ とおく．

(i)　f の極とそこでの留数を求めよ．

(ii)　曲線 C_R を $C_R=\{Re^{\theta i};\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$ によって与えられる半円とする．$R\to\infty$ のとき，$\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ が成り立つことを示せ．

(iii)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

5

$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．

(1) X の部分集合 A がコンパクトであることの定義を書け．

(2) 1 つの元からなる部分集合 $\{x\}\subset X$ は X のコンパクト部分集合であることを示せ．

(3) 有限部分集合 $\{x_1,\ldots,x_n\}\subset X$ は X のコンパクト部分集合であることを示せ．