6 　図のように半径 $2a$ の厚さの無視できる薄い剛体円板に半径 a の円形の穴をくりぬく。

このくりぬいた後の板の質量を M とし、その面密度 σ は一様とする。この円板を、図の点 A を通る紙面に垂直な軸のまわりで微小振動させたときの振動の周期を次の順序で求めてみよう。

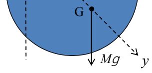
(1) この円板の面密度 σ を求めよ。

(2) この円形の穴をくりぬいた後の円板の重心 G を求めよ（円板の対称性より重心は y 軸上にあることは明らかなので、重心の位置を AG 間の距離として求めよ）。

(3) この板の点 A を通る紙面に垂直な軸のまわりの慣性モーメント I を求めよ。

(4) この板に働く全重力は、重心 G に作用していると考えてよいので、図の様に重心 G に Mg という大きさの重力が鉛直下方に働く。この重力のもとで、この板を微小振動させたときの、運動方程式を求めよ。ここで、図のように AG を通る軸が鉛直下方となす角（振れ角）を $\theta(t)$ とせよ。ただし、振れ角は大きくないとし、$\theta(t) << 1$ とする。（慣性モーメント I がわからなければ式中で I をそのまま用いてもよい）。

(5) この微小振動の周期 $T(= 2\pi/\omega \ \omega$：角速度) を求めよ。



図

7

(A)

(A-1) 真空中に, 電荷面密度 σ_0[C/m^2] で一様に帯電した無限に広い平面がある。ここではこれを「面電荷」と呼ぶことにする。なお真空の誘電率を ε_0 と書く。
この面を $x-y$ 平面とした座標系を使って「面電荷」が作る電場を求めなさい。

(A-2) この「面電荷」の作る電場に対応した静電ポテンシャルを求めなさい。なお、ポテンシャルの基準点を $z=0$ とする。

(A-3) (A-1) で求めた電場の発散を求めなさい。

(B)

(B-1) $x-y$ 平面上を x 軸の正の方向に流れる一様な電流（面電流）$i_0\hat{x}$ [A/m] :（ここで $\hat{x}$ は x 軸の正の方向を向いた単位ベクトル）が作る磁束密度を求めなさい。なお真空の透磁率は, 記号 μ_0 を使うこと。

(B-2) (B-1) で求めた磁束密度に対応するベクトルポテンシャルを求めなさい。

8　一次元区間 $0 \leqq x \leqq L$ 上で定義される質量 m の粒子の波動関数 $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}\exp(\mathrm{i}k_n x)$ を考える。ただし、n は整数で、$k_n = 2\pi n/L$ で与えられるものとする。また、$V(x) = V_0\delta(x - L/4)$ とする。ここで $V_0 \neq 0$ はエネルギーの次元を持った定数で、$\delta(x)$ は δ 関数を表す。

波動関数 $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ で表される状態について、以下の問に答えよ。

1. $\varphi(x)$ は運動量演算子 $\hat{p}$ の固有関数かどうか、理由と共に答えよ。
2. この状態について、運動量を測定した。観測結果がどうなるか答えよ。
3. 運動量の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ を求めよ。
4. 波動関数 $\varphi_n(x)$ についての $V(x)$ の期待値を $\langle V \rangle_n$ と表すことにする。$\langle V \rangle_n$ を求めよ。

波動関数の重ね合わせ $\varphi_{\mathrm{c}}(x) = \varphi_n(x) + \varphi_{-n}(x)$（ただし $n \neq 0$) で表される状態について、以下の問に答えよ。

5. $\varphi_{\mathrm{c}}(x)$ を規格化せよ。
6. $\varphi_{\mathrm{c}}(x)$ は運動量演算子および運動エネルギー演算子 $\hat{T} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m}$ のそれぞれについて、固有関数であるかどうかを理由と共に答えよ。
7. 運動量の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ と運動エネルギーの期待値 $\langle \hat{T} \rangle$ を求めよ。
8. この重ね合わせ状態について観測を行ったときに、φ_n および φ_{-n} が表す状態の出現確率をそれぞれ P_n、P_{-n} とする。P_n および P_{-n} を求めよ。
9. 波動関数 $\varphi_{\mathrm{c}}(x)$ についての $V(x)$ の期待値を $\langle V \rangle_{\mathrm{c}}$ と表すことにする。$\langle V \rangle_{\mathrm{c}}$ を求めよ。
10. 問 4 で定義した $\langle V \rangle_n$ および $\langle V \rangle_{-n}$ について単純に統計平均した値を $\bar{V} = P_n\langle V \rangle_n + P_{-n}\langle V \rangle_{-n}$ とする。$\langle V \rangle_{\mathrm{c}}$ と $\bar{V}$ を比較し、値が異なる理由を説明せよ。量子力学的状態における波動性や干渉についてふれること。波動関数 φ_n、φ_{-n} および φ_{c} の $x = L/4$ での値を用いて説明しても良い。

9　N 個の独立な調和振動子が配列している系が温度 T の熱平衡状態にある。それぞれの調和振動子は，$\varepsilon_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ のエネルギーを取りうる。ただし，n は 0 以上の整数である。以下の問いに答えよ。

(1) N=1 の場合，分配関数 z_1 は，$z_1 = \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$ となる。導出過程を示せ。必要なら初項 a，公比 $r(<1)$ の無限等比級数の和が $\frac{a}{1-r}$ となることを使うこと。

(2) 分配関数が Z で与えられる系のエネルギー期待値 $\langle E\rangle$ は $\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log_e Z$ となる。分配関数の定義を示し，これを証明せよ。

(3) N=1 の場合のエネルギー期待値 $\langle E_1\rangle$ を計算せよ。

(4) N=1 の場合の比熱が，高温 $(k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega)$ でどのような値に漸近するか答えよ。必要に応じて $x \ll 1$ の場合に $e^x \sim 1+x$ となることを使うこと。

(5) 系全体の分配関数 $Z_N = z_1^N$ からヘルムホルツの自由エネルギー $F(= -\frac{1}{\beta}\log_e Z_N)$ を計算せよ。

(6) (5) で求めた F からエントロピー $S(= -\frac{\partial F}{\partial T})$ を計算せよ。

10 金属中の自由電子が一様な外力 $\boldsymbol{f}$ の下で運動する場合の運動方程式が次式で与えられるものとする。

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\boldsymbol{p}}{\tau} + \boldsymbol{f} \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{p}$ は自由電子の平均の運動量、τ は平均の散乱時間である。また、自由電子の電荷を $e(< 0)$、密度を n、質量を m、平均速度を $\boldsymbol{v}$ とする。

問１　一様な直流電場 $\boldsymbol{E}$ が存在する場合、定常状態における直流電気伝導度 σ_0 を (1) 式から導け。

問２　一様な電場 $\boldsymbol{E}$ によって直流電流が x 方向に流れ、かつ一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ が z 方向に加えられている場合の定常解から、ホール抵抗率 ρ_{xy} が磁場の大きさに比例することを導け。また、その比例係数 (ホール係数) を求めよ。ただし、ホール抵抗率 ρ_{xy} は、y 方向の電場 E_y と x 方向の電流密度 j_x を用いて、$\rho_{xy} \equiv \dfrac{E_y}{j_x}$ で与えられるものとする。

問３　以下の設問 [A] または [B] のうち、いずれか一方を選択して答えよ。

[A]：自由電子が一様な直流電場 $\boldsymbol{E}$ による外力を受け、かつ全く散乱を受けない場合（すなわち、ゼロ抵抗状態）の運動方程式 $\left(\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E}\right)$ と電磁誘導に対するマックスウェル方程式 $\left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0\right)$ を用いて、ゼロ抵抗状態における電流密度 $\boldsymbol{j}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の間に成り立つ関係式を示せ。また、この関係式と超伝導のマイスナー効果に対するロンドン理論から得られる方程式 $\left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{j} + \dfrac{ne^2}{m}\boldsymbol{B} = 0\right)$ を比較して、その違いについて説明せよ。

[B]：金属中の周期ポテンシャル中を運動するブロッホ電子に対する半古典的取り扱いでは、(1) 式に現れる平均運動量 $\boldsymbol{p}$ がブロッホ電子の波数 $\boldsymbol{k}$ を用いて、$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ で置き換えられる。また、電子の速度 $\boldsymbol{v}$ はエネルギーバンド $\mathcal{E}(\boldsymbol{k})$ を用いて、$\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\partial \mathcal{E}(\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{k}}$ で与えられる。このとき、全く散乱がない場合の (1) 式と $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ を比較することにより、ブロッホ電子の有効質量 m^* をエネルギーバンド $\mathcal{E}(\boldsymbol{k})$ を用いて表せ。

11 放射性元素の原子は一定の確率で別の元素へと崩壊する。時刻 t での放射性物質の原子数を $N(t)$ とし，単位時間当たりにこの原子が崩壊する確率を p とする。

問 1. $N(t)$ の時間変化 $\frac{dN}{dt}$ を，p を用いた微分方程式として示せ。

問 2. $t = 0$ での原子数を N_0 とした時，この微分方程式を解け。

問 3. 原子数が $t = 0$ での原子数の $\frac{1}{2}$ になるのにかかる時間を半減期と呼ぶ。半減期を p を用いて示せ。

放射性元素の具体的な例として，$^{238}\mathrm{U}$ を考える。

$$^{238}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}\mathrm{Th} + {}^{4}\mathrm{He}$$

問 4. この崩壊の種類を述べよ。

問 5. 崩壊により出てきた $^{4}\mathrm{He}$ は，鉛直上向き方向の一様磁場中でどのように動くか，定性的に述べよ。

問 6. $^{238}\mathrm{U}$，$^{234}\mathrm{Th}$，$^{4}\mathrm{He}$ の質量はそれぞれ $238.0738u$，$234.0436u$，および $4.0026u$ である。ここで u は原子質量単位であり，$1u$=1.66054×10^{-27} kg，$u \times c^2 = 1.4924 \times 10^{-10}$ J である。この崩壊で出てくるエネルギーを有効数字二桁で計算せよ。

12 近年目覚ましく進展する科学やそれに基づく新技術の出現は、我々の価値観や生活形態、そして我々をとりまく現代社会の在り方に良くも悪くも多大な影響を与え、好むと好まざるとにかかわらず大きな変革をもたらす。

各自が最も興味を持ち、あるいはこれから研究しようと考える物理学や数理科学、あるいはそれに基づく科学技術に関する一つのテーマを取り上げ、その内容をわかりやすく、該当する学問分野での意義・重要性を含めて解説し、さらに、それが実社会にもたらすであろう影響について、プラスのみならずマイナスの側面も含めて論じよ。