1

(1) 4 次対称群 S_4 の自明でない部分群であって，S_4 の正規部分群であるものを一つ挙げよ．さらに，それが (i) S_4 の部分群であること，および (ii) S_4 の正規部分群であることを示せ．

(2) 4 次対称群 S_4 の部分群であって，S_4 の正規部分群でないものを一つ挙げよ．さらに，それが (i) S_4 の部分群であること，および (ii) S_4 の正規部分群でないことを示せ．

2

空間内の滑らかな曲線 $\boldsymbol{p}(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ を考える．ただし t はパラメータである．

(1) この曲線の $0 \leq t \leq 1$ の部分の弧長を求めよ．

(2) この曲線上の $t = \pi/2$ の点 $\boldsymbol{p}(\pi/2)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) この曲線上の点 $\boldsymbol{p}(\pi/3)$ において垂直に交わる法平面の方程式を $ax + by + cz = d$ の形で求めよ．

(4) この曲線上の点 $\boldsymbol{p}(\pi)$ における曲率を求めよ．

3

2 次元ラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) = 0$$

について以下の問に答えよ．

(1) 独立変数を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ により r, θ に変換すると，ラプラス方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) u(r, \theta) = 0 \qquad (*)$$

と書き換えられることを示せ．

(2) 方程式 $(*)$ について，円環領域

$$A = \{\, (r, \theta) \,|\, 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

を考え，さらに u は r のみの関数 $u = u(r)$ であるとする．境界条件 $u(1) = 1, u(2) = 2$ を満たす解を求めよ．

4

(1) $z^4+4=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ の極のうち，虚部が正である極における f の留数を求めよ．

(3) $R>0$ とし，C_R を原点中心，半径 r の上半円とする：$C_r=\{Re^{i\theta};0\leqq\theta\leqq\pi\}$．このとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$ を示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx$ の値を求めよ．

5

以下の問に答えよ．

(1) 写像 $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$ の合成写像 $g\circ f:X\to Z$ が全射であるとする．

　(1) g は全射であることを示せ．

　(2) f は一般に全射ではない．そのような例を挙げよ．

(2) 写像 $f:X\to Y$ と部分集合 $A\subset X$ に対し，$A\subset f^{-1}(f(A))$ が成り立つことを示せ．また，一般に等号は成り立たないことを示せ．

(3) K_1,K_2 を距離空間のコンパクト集合とする．このとき，$K_1\cup K_2$ はコンパクト集合であることを示せ．